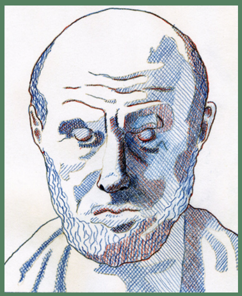
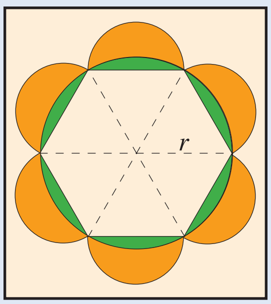


Hippocrate de Chios
vers ~470 à ~410

En cherchant à résoudre le problème de la quadrature du cercle, Hippocrate a déterminé les aires des lunules (ou croissants de lune) qui portent son nom.

Hippocrate de Chios



Hippocrate de Chios, qu'il ne faut pas confondre avec le médecin Hippocrate de Cos, est né vers ~470 et on ignore la date de son décès. Il a quitté son île vers ~430 pour se rendre à Athènes.

Hippocrate était armateur et c'est pour récupérer un navire saisi par la douane qu'il se rendit à Athènes. Durant son séjour, il rencontre des philosophes et des mathématiciens et il s'initie aux mathématiques.

Hippocrate est le premier mathématicien à déterminer l'aire d'une surface délimitée par des courbes. Il ne calcule pas l'aire de cette surface au sens où nous l'entendons aujourd'hui. Il la compare à une surface délimitée par des droites.

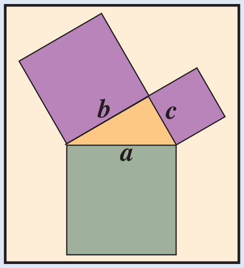
Il fut également un des premiers à organiser l'ensemble des connaissances géométriques sur un même fondement axiomatique.

Hippocrate s'est intéressé au problème de la quadrature du cercle qui consiste à construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un cercle donné. Selon Platon, pour résoudre ce problème, il ne fallait utiliser qu'une règle et un compas.

En cherchant la solution à ce problème, Hippocrate a obtenu la quadrature des lunules. Une lunule est une figure plane délimitée par deux arcs de cercle de rayons inégaux.

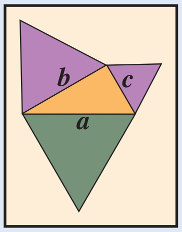
Pour déterminer l'aire de ces figures, Hippocrate se sert d'une généralisation du théorème de Pythagore.

Ce théorème, établit que :



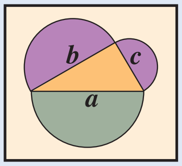
L'aire du carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

Cependant, les aires de deux figures semblables sont dans le rapport des carrés des lignes homologues. Cela signifie que l'on peut interpréter le théorème en utilisant des aires de diverses formes. On obtient alors, par exemple :



L'aire du triangle équilatéral construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des triangles équilatéraux construits sur les côtés de l'angle droit.

ou encore :



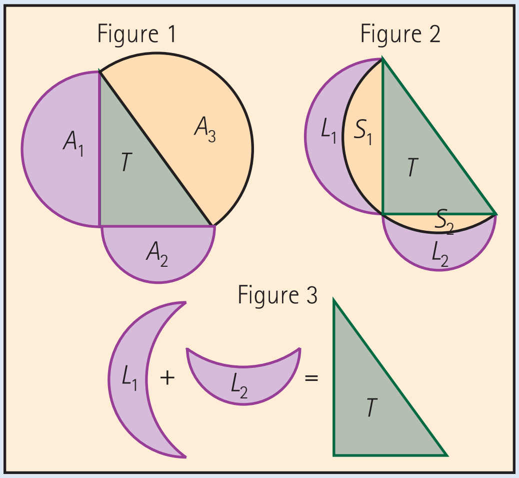
L'aire du demi-cercle construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des demi-cercles construits sur les côtés de l'angle droit.

Les lunules d'Hippocrate

Le théorème des lunules d'Hippocrate s'énonce ainsi :

La somme des aires des deux lunules construites sur les petits côtés d'un triangle rectangle est égale à l'aire du triangle lui-même.

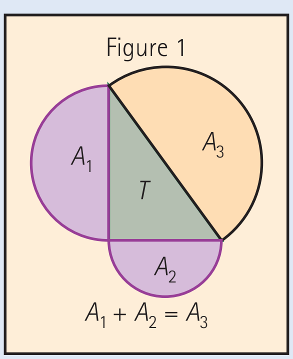
La figure suivante :



constitue ce que l'on appelle une « preuve sans mots » du théorème des lunules. Pour s'approprier une preuve sans mots, il faut la traduire dans le langage ordinaire et s'assurer que l'on comprend la justification de chacune des étapes.

En examinant ces figures, on apprend d'abord ce qu'on doit entendre par lunules construites sur les deux petits côtés d'un triangle rectangle. Il s'agit des surfaces délimitées par des demi-cercles dont les côtés du triangle sont les diamètres; les demi-cercles étant construits vers l'extérieur dans le cas des petits côtés, et vers l'intérieur dans le cas de l'hypoténuse.

La figure 1 permet d'écrire



$$A_1 + A_2 = A_3,$$

en vertu du théorème de Pythagore et du théorème affirmant que la surface d'un disque – et donc d'un demi-disque – est proportionnelle au carré du rayon du disque, donc aussi du diamètre.

Dans la figure 2, le demi-cercle ayant l'hypoténuse comme diamètre a subi une réflexion par rapport à l'hypoténuse.

Puisque le triangle rectangle est inscrit dans le demi-cercle, le sommet de l'angle droit est sur la circonférence du demi-cercle ayant subi cette réflexion. Celle-ci a pour effet de diviser en deux régions les demi-cercles ayant les côtés de l'angle droit comme diamètres et en trois régions le demi-cercle ayant l'hypoténuse comme diamètre. Puisque le tout est égal à la somme des parties, cela donne :

$$A_1 = L_1 + S_1,$$
$$A_2 = L_2 + S_2$$
et
$$A_3 = T + S_1 + S_2.$$

On peut donc écrire, par substitution :

$$L_1 + S_1 + L_2 + S_2 = T + S_1 + S_2.$$

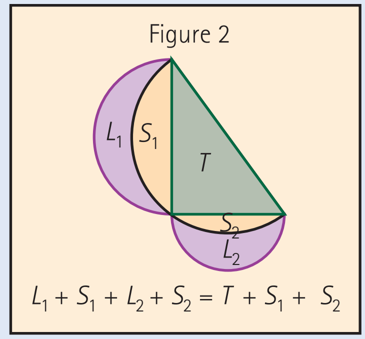
En simplifiant cette égalité, on obtient :

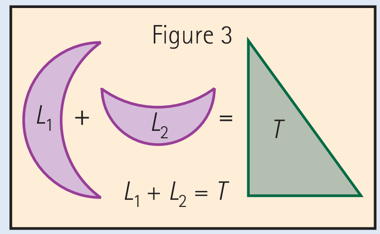
$$L_1 + L_2 = T.$$

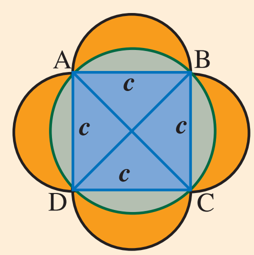
Remarquons que les notations et règles de manipulations algébriques utilisées dans cette présentation n'étaient pas connues à l'époqie d'Hippocrate de Chios.

On peut étendre l'étude des lunules en déterminant, par exemple, la relation entre l'aire d'un hexagone et la somme des aires des lunules construites sur ces côtés et déduire en corollaire une relation entre l'aire d'un triangle équilatéral et la lunule construite sur un de ses côtés.

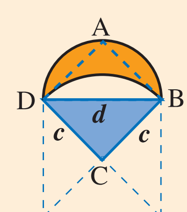
D'autres développements sur le calcul d'aires ont été obtenus en explorant une autre piste pour obtenir la quadrature du cercle. Cette piste est ce que l'on appelle aujourd'hui la *méthode d'exhaustion*.







La somme des aires des quatre lunules construites sur les côtés d'un carré est égale à l'aire du carré.



L'aire de la lunule construite sur l'hypoténuse d'un triangle isocèle rectangle est égale à l'aire de ce triangle.