Volume d'un solide

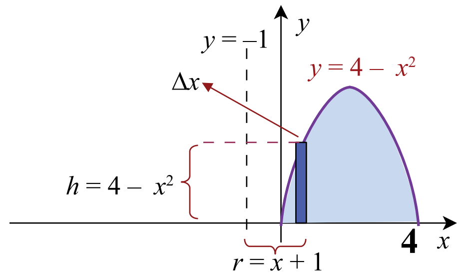
Méthode des tubes

Exercice 01 : Calcul d'un volume par les tubes

En appliquant la méthode des tubes, déterminer le volume du moule à gâteau engendré par la rotation autour de la droite $x = -1$ de la région délimitée par l'axe des x et la courbe $y = 4x - x^2$.

Solution

Relation entre les variables et différentielle

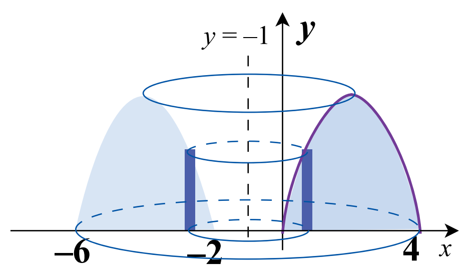


On représente d'abord la surface génératrice et une bande rectangulaire parallèle à l'axe de rotation et on esquisse le solide engendré.

Le rayon du tube engendré par la rotation de la bande rectangulaire est $r = x + 1$.

La hauteur du tube est l'ordonnée du point sur la courbe $y = 4x - x^2$.

Puisque la rotation est autour de la droite $x = -1$, on intègre selon la variable x et l'épaisseur du tube est Δx.



Le volume du représentant des tubes est alors

$$\Delta V = 2\pi(x + 1)(4x - x^2)\,\Delta x.$$

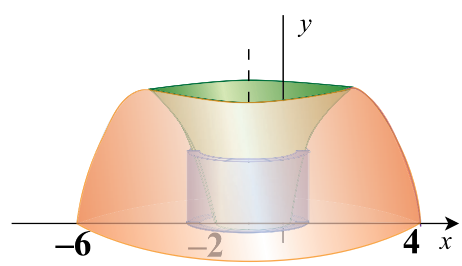
On effectue le produit et on obtient que la différentielle du volume est

$$dV = 2\pi\,(4x + 3x^2 - x^3)dx.$$

Calcul du volume

Dans ce problème, les bornes d'intégration sont 0 et 4 et le volume du solide est

$$V = 2\pi \int_0^4 (4x + 3x^2 - x^3)\,dx.$$



On effectue cette intégrale en appliquant le théorème fondamental, on obtient

$$V = 2\pi \int_0^4 (4x + 3x^2 - x^3)\,dx = 2\pi\left(2x^2 + x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg]_0^4$$

$$= 2\pi\left[\left(2\times 4^2 + 4^3 - \frac{4^4}{4}\right) - (0)\right]$$

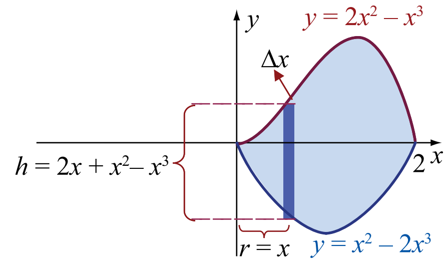
$$= 2\pi(32 + 64 - 64) = 64\pi.$$

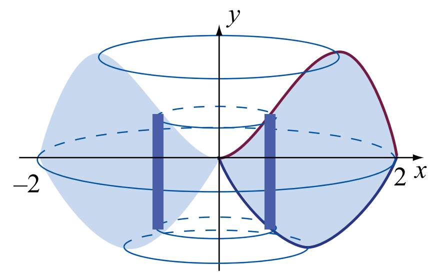
Par conséquent, le volume du moule est de 64π u^3.

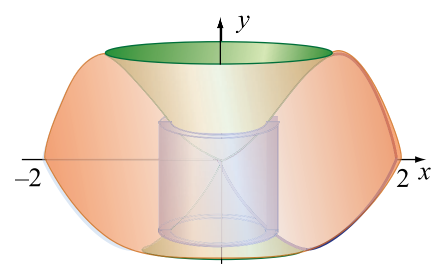
Exercice 02 : Calcul d'un volume par les tubes

En appliquant la méthode des tubes, déterminer le volume engendré par la rotation autour de l'axe vertical de la région délimitée par les courbes

$$y = 2x^2 - x^3 \text{ et } y = x^2 - 2x.$$







Solution

Relation entre les variables et différentielle

On représente d'abord la surface génératrice et une bande rectangulaire parallèle à l'axe de rotation et on esquisse le solide engendré.

Le rayon du tube engendré par la rotation de la bande rectangulaire est

$$r = x.$$

La hauteur du tube est la différence des ordonnées, ce qui donne

$$\begin{aligned} h &= (2x^2 - x^3) - (x^2 - 2x) \\ &= 2x^2 - x^3 - x^2 + 2x \\ &= 2x + x^2 - x^3. \end{aligned}$$

Puisque la rotation est autour de l'axe vertical, on intègre selon la variable x et l'épaisseur du tube est Δx.

Le volume du représentant des tubes est

$$\Delta V = 2\pi x\,(2x + x^2 - x^3)\,\Delta \mathrm{x}.$$

On en déduit directement la différentielle du volume,

$$dV = 2\pi(2x^2 + x^3 - x^4)\,dx.$$

Calcul du volume

Dans ce problème, les bornes d'intégration sont 0 et 2 et le volume du solide est

$$V = 2\pi\int_0^2 (2x^2 + x^3 - x^4)\,dx.$$

On effectue cette intégrale en appliquant le théorème fondamental,

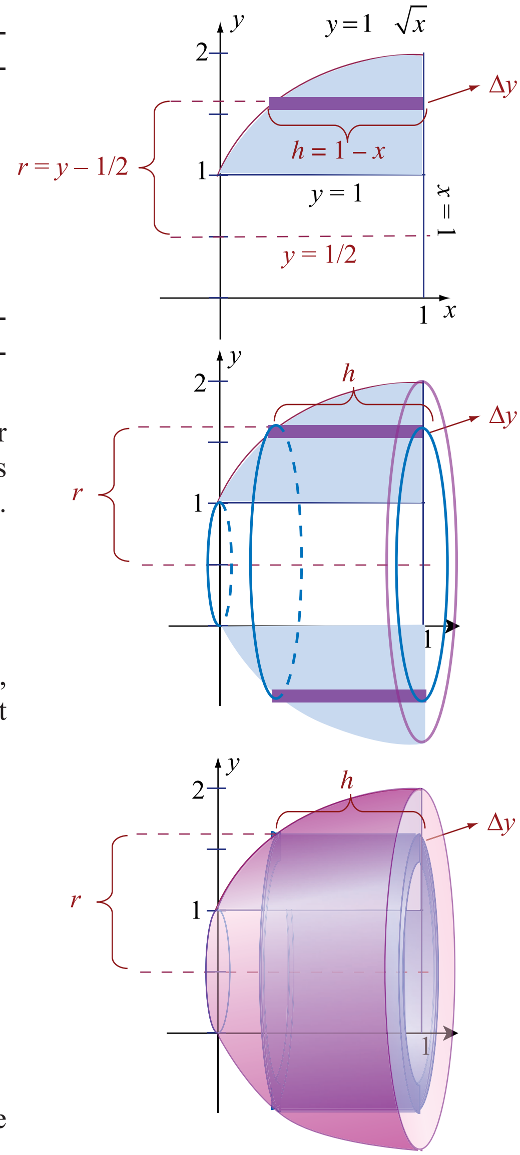
$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_0^2 (2x^2 + x^3 - x^4)\,dx = 2\pi\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg]_0^2 \\ &= 2\pi\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg]_0^2 = 2\pi\left[\left(\frac{2\times 2^3}{3} + \frac{2^4}{4} - \frac{2^5}{5}\right) - (0)\right] \\ &= 2\pi\left(\frac{80+60-96}{15}\right) = \frac{88\pi}{15}. \end{aligned}$$

On obtient $88\pi/15$ u^3.

Exercice 03 : Calcul d'un volume par les tubes

Utiliser la méthode des tubes pour calculer le volume du solide engendré par la révolution autour de la droite y = 1/2 de la région bornée par

$$x=1,\ y=1 \text{ et } y=1+\sqrt{x}.$$



Solution

Relation entre les variables et différentielle

Représentons d'abord la surface génératrice et une bande rectangulaire parallèle à l'axe de révolution, puis esquissons le solide engendré.

Le rayon r du tube engendré est égal à $y - 1/2$, de plus la hauteur est la différence des variables en abscisse après avoir isolé x dans l'équation décrivant la frontière supérieure de la surface génératrice. On obtient

$$h = 1 - x, \text{ où } x = (y-1)^2 \text{ ce qui donne}$$
$$h = 1 - (y-1)^2 = 1 - (y^2 - 2y + 1) = 2y - y^2.$$

Puisque la révolution est autour d'une droite parallèle à l'axe des x, on intègre selon y et l'épaisseur est Δy. Le volume du représentant est

$$\Delta V = 2\pi\,(y - 1/2)(2y - y^2)\,\Delta y$$
$$= 2\pi\left(\frac{5y^2}{2} - y - y^3\right)\ y.$$

On en déduit directement la différentielle du volume,

$$dV = 2\pi\left(\frac{5y^2}{2} - y - y^3\right)dy.$$

Calcul du volume

Dans ce problème, les bornes d'intégration sont 1 et 2 et le volume du solide est

$$V = 2\pi\int_1^2\left(\frac{5y^2}{2} - y - y^3\right)dy.$$

On effectue cette intégrale en appliquant le théorème fondamental,

$$V = 2\pi\int_1^2\left(\frac{5y^2}{2} - y - y^3\right)dy = 2\pi\left(\frac{5y^3}{6} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg]_1^2 = \pi\left(\frac{5y^3}{3} - y^2 - \frac{y^4}{2}\right)\Bigg]_1^2$$
$$= \pi\left[\left(\frac{5\times 8}{3} - 4 - \frac{16}{2}\right) - \left(\frac{5}{3} - 1 - \frac{1}{2}\right)\right] = \pi\left[\left(\frac{40}{3} - 12\right) - \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right)\right] = \frac{7\pi}{6}.$$

On obtient $7\pi/6$ u^3.

