Transformations de l'espace

Tout comme dans le plan, on utilise les **coordonnées homogènes** pour représenter une translation. Pour assurer la compatibilité de la multiplication des matrices, on ajoute une ligne et une colonne avec un 1 sur la diagonale et des zéros hors diagonale pour les matrices des homothéties, des étirements, des rotations et des symétries.

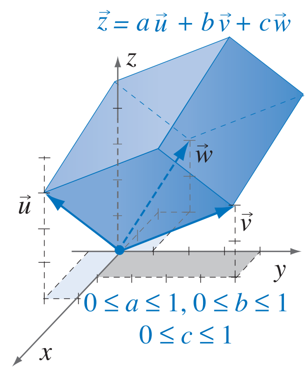
Infographie13

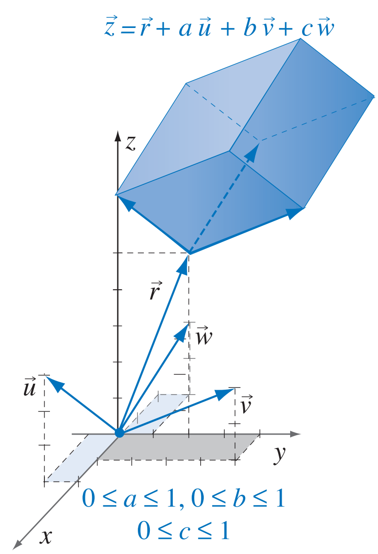
EXEMPLE 1

Soit $\vec{u} = (2; -1; 3)$, $\vec{v} = (1; 4; 2)$ et $\vec{w} = (-2; 1; 2)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a) Donner la description vectorielle et la description paramétrique du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

b) Soit $\vec{r} = (0; 2; 5)$, un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Donner la description vectorielle et la description paramétrique du translaté du parallélépipède par le vecteur $\vec{r}$.





Solution

a) Les points du parallélépipède sont décrits vectoriellement par :

$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, où $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$ et $0 \le c \le 1$

En coordonnées cartésiennes, cela donne l'équation vectorielle :

$(x; y; z) = a(2; -1; 3) + b(1; 4; 2) + c(-2; 1; 2)$

où $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$ et $0 \le c \le 1$

La description paramétrique des points du parallélépipède est :

$$\begin{cases} x = 2a + b - 2c \\ y = -a + 4b + c \\ z = 3a + 2b + 2c \end{cases}, \text{ où } 0 \le a \le 1,\ 0 \le b \le 1 \text{ et } 0 \le c \le 1.$$

b) Les points du parallélépipède translaté sont décrits vectoriellement par :

$\vec{z} = \vec{r} + a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, où $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$ et $0 \le c \le 1$

En coordonnées cartésiennes, cela donne l'équation vectorielle :

$(x; y; z) = (0; 2; 5) + a(2; -1; 3) + b(1; 4; 2) + c(-2; 1; 2)$

où $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$ et $0 \le c \le 1$

La description paramétrique des points du translaté est :

$$\begin{cases} x = 2a + b - 2c \\ y = 2 - a + 4b + c \\ z = 5 + 3a + 2b + 2c \end{cases}, \text{ où } 0 \le a \le 1,\ 0 \le b \le 1 \text{ et } 0 \le c \le 1.$$

Pour décrire cette transformation par une matrice, il faut avoir recours aux coordonnées homogènes. La matrice s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de l'image du parallélépipède se fait alors de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2a+b-c \\ -a+4b+c \\ 3a+2b+2c \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a+b-c \\ -a+4b+c+2 \\ 3a+2b+2c+5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dans $\mathbb{R}^3$, la matrice de translation par un vecteur $\vec{u} = (a; b; c)$ est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de la translation inverse est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrices en coordonnées homogènes

Pour assurer la compatibilité des matrices pour la multiplication, soit la composition des transformations, on écrit toutes les matrices des transformations sous le format des coordonnées homogènes.

Homothétie

Infographie14

En coordonnées homogènes de $\mathbb{R}^3$, la matrice d'une homothétie de rapport k et celle de la transformation inverse sont respectivement :

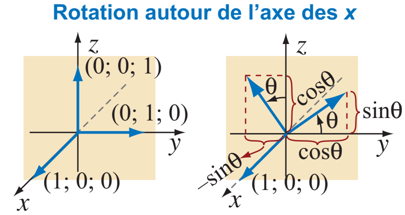
$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1/k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rotation

Infographie15

Dans $\mathbb{R}^3$, on peut effectuer une rotation selon l'un ou l'autre des trois axes. Si on effectue une rotation d'un angle θ autour de l'axe des x, le vecteur $(1; 0; 0)$ est sa propre image. Le vecteur $(0; 1; 0)$ devient $(0; \cos\theta; \sin\theta)$ et le vecteur $(0; 0; 1)$ devient $(0; -\sin\theta; \cos\theta)$.

Rotation autour de l'axe des *x*



$T(1; 0; 0) = (1; 0; 0)$
$T(0; 1; 0) = (0; \cos\theta; \sin\theta)$
$T(0; 0; 1) = (0; -\sin\theta; \cos\theta)$

La matrice de rotation d'un angle θ autour de l'axe des x est :

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de la transformation inverse est simple à déterminer, il suffit de substituer $-\theta$ à θ puisque l'inverse est une rotation d'angle $-\theta$.
Le sens de rotation d'un point autour d'un axe est anti-horaire lorsqu'on regarde vers l'origine avec cet axe pointant vers notre œil. On peut écrire

la matrice d'une rotation d'un angle α autour d'une droite passant par l'origine comme un produit de matrices de rotations autour des axes de coordonnées.

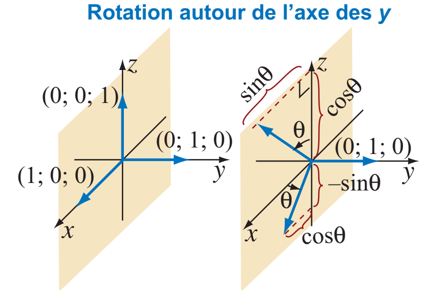
La première figure ci-contre illustre l'effet sur la base formée des vecteurs orthonormés $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$ et $\vec{k} = (0; 0; 1)$ d'une rotation d'un angle θ autour de l'axe des y. La matrice de rotation est :

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La seconde figure ci-contre illustre l'effet sur la base orthonormée d'une rotation d'un angle θ autour de l'axe des z. La matrice de rotation est :

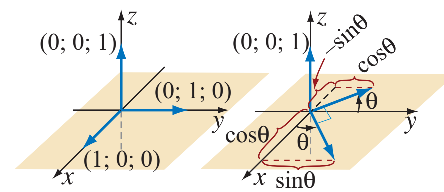
$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rotation autour de l'axe des *y*



$T(1; 0; 0) = (\cos\theta; 0; -\sin\theta)$
$T(0; 1; 0) = (0; 1; 0)$
$T(0; 0; 1) = (\sin\theta; 0; \cos\theta)$

Rotation autour de l'axe des *z*



$T(1; 0; 0) = (\cos\theta; \sin\theta; 0)$
$T(0; 1; 0) = (-\sin\theta; \cos\theta; 0)$
$T(0; 0; 1) = (0; 0; 1)$

EXEMPLE 2

On applique une rotation de 75° autour de l'axe des y.

a) Calculer l'image P' du point $P(-3; 4; 2)$.

b) On applique ensuite une translation selon le vecteur (2; 1; 3). Calculer l'image de P après cette seconde transformation.

c) Déterminer la matrice de la composition des transformations.

Solution

a) La matrice de rotation en coordonnées homogènes est :

$$R_{y,75°} = \begin{pmatrix} \cos 75° & 0 & \sin 75° & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 75° & 0 & \cos 75° & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,259 & 0 & 0,966 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,966 & 0 & 0,259 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule l'image du vecteur position du point $P(3; 2; 4)$ par la multiplication matricielle.

$$\begin{pmatrix} 0,259 & 0 & 0,966 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,966 & 0 & 0,259 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,155 \\ 4 \\ 3,415 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'image du point $P(3; 2; 4)$ par la transformation est le point P' de coordonnées (1,155; 4; 3,415).

Infographie16

b) La matrice de la translation est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le produit matriciel, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1{,}155 \\ 4 \\ 3{,}415 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}155 \\ 5 \\ 6{,}415 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La translation de vecteur (2; 1; 3) donne :

$$P''\ (6{,}641;\ 3;\ 1{,}138).$$

c) La matrice de la composition des transformations est le produit

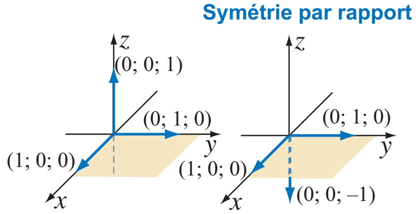
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0{,}259 & 0 & 0{,}966 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}966 & 0 & 0{,}259 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}259 & 0 & 0{,}966 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -0{,}966 & 0 & 0{,}259 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Symétrie par rapport aux plans

Pour effectuer une symétrie par rapport à un des plans du système d’axes, il suffit de changer le signe de la composante hors de ce plan comme l’illustrent les figures suivantes.

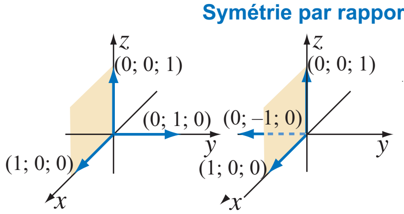
Infographie17

Symétrie par rapport au plan *xy*



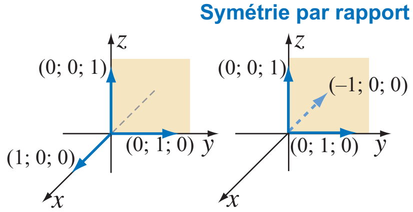
$$S_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Symétrie par rapport au plan *xz*



$$S_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Symétrie par rapport au plan *yz*



$$S_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

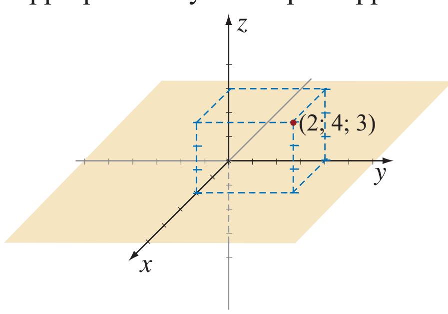
Les symétries par rapport à un plan passant par l’origine peuvent s’exprimer comme composition d’une symétrie par rapport à un plan du système d’axes et de rotations autour des axes de coordonnées.

En utilisant les coordonnées homogènes, les rotations peuvent être composées avec des translations pour décrire le déplacement d’un robot ou celle d’une caméra, même virtuelle.

Exercices

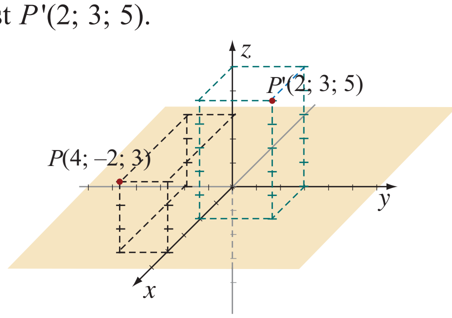
1. On applique une rotation de 30° autour de l'axe des x.
   a) Calculer l'image P' du point $P(2; 4; 5)$.
   b) On applique ensuite une translation selon le vecteur $(3; -2; 1)$. Calculer l'image de P' après cette seconde transformation.
   c) Déterminer la matrice de la composition des transformations.
   d) Déterminer la matrice de la composition des transformations si la translation est effectuée avant la rotation. Calculer l'image du point $P(2; 4; 5)$ par cette transformation composée.

2. On applique une symétrie par rapport au plan xy.



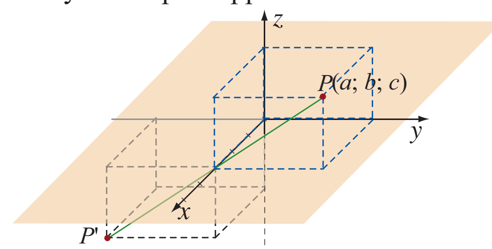
   a) Écrire la matrice de cette transformation et calculer le symétrique du point $P(2; 4; 3)$ à l'aide de cette matrice.
   b) La symétrie est suivie d'une compression de facteur 1/2 dans la direction du vecteur $(0; 1; 0)$. Déterminer la matrice représentant la composition de ces transformations et utiliser celle-ci pour calculer l'image du point $P(2; 4; 3)$.

3. Par une translation, l'image du point $P(4; -2; 3)$ est $P'(2; 3; 5)$.

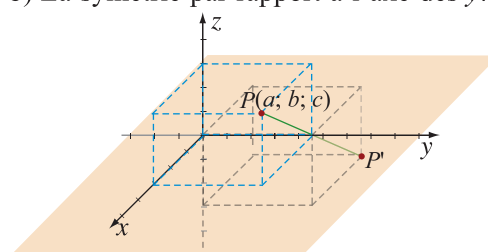


   a) Déterminer la matrice de cette translation.
   b) Déterminer l'image par cette translation du parallélépipède rectangle construit sur les vecteurs $(4; 0; 0)$, $(0; -2; 0)$ et $(0; 0; 1)$.
   c) On effectue ensuite une symétrie par rapport au plan xy, déterminer l'image par cette transformation du parallélépipède obtenu en b).
   d) Déterminer la matrice de la composition de ces transformations.

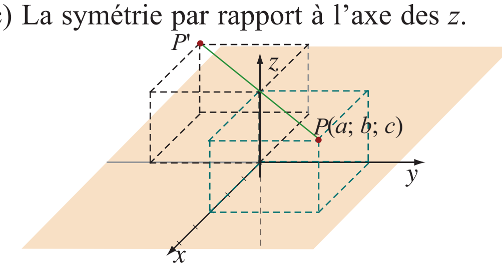
4. Déterminer la matrice de la transformation de l'espace pour chacune des symétries indiquées.
   a) La symétrie par rapport à l'axe des x.



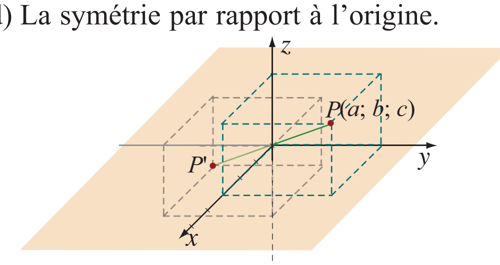
   b) La symétrie par rapport à l'axe des y.



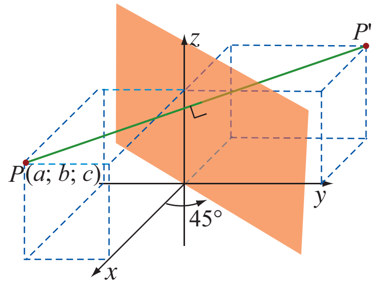
   c) La symétrie par rapport à l'axe des z.



   d) La symétrie par rapport à l'origine.

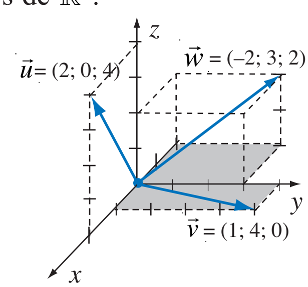


5. La figure suivante illustre la symétrie par rapport au plan $y = x$.



a) Déterminer la matrice associée à cette transformation.
b) Déterminer l'image par la transformation du point (4; –2; 3).
c) Déterminer l'image par la transformation du parallélépipède construit sur les vecteurs (4; –3; 2), (2; –2; 3) et (1; –4; 1).
d) La symétrie est suivie d'une rotation de 90° selon l'axe des y, puis d'une translation selon le vecteur $\vec{u}$ = (3; –5; 4). Déterminer la matrice de la composition des transformations.

6. Soit $\vec{u}$ = (2; 0; 4), $\vec{v}$ = (1; 4; 0) et $\vec{w}$ = (–2; 3; 2), trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.



a) Donner la description vectorielle et la description paramétrique de la pyramide à base triangulaire, ou tétraèdre, sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
b) Écrire la matrice dont l'effet est une réflexion par rapport à l'axe xz accompagnée d'un étirement de facteur 2 suivant l'axe des y.
c) Calculer l'image des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par cette transformation.
d) Donner la description paramétrique du tétraèdre sur les images des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par la transformation.
e) Vérifier que l'on obtient cette description paramétrique en multipliant la description paramétrique du tétraèdre initial par la matrice de la transformation.
f) Écrire la matrice dont l'effet est une rotation de 90° autour de l'axe des x. Calculer l'image du tétraèdre initial par cette rotation.
g) Écrire la matrice dont l'effet est une translation selon le vecteur (–3; 4; 5). Calculer l'image du tétraèdre initial par rapport à cette translation.

7. Donner la matrice de la transformation demandée en coordonnées homogènes.
a) Translation T selon le vecteur (4; 5; 3).
b) Rotaion R de 30° autour de l'axe des x.
c) $T \circ R$.
d) $R \circ T$
e) Calculer l'image du vecteur (3; 4; 2) par la transformation $T \circ R$.
f) Calculer l'image du vecteur (3; 4; 2) par la transformation $R \circ T$.

Réponses

1. a) $P'(2; 0{,}964; 6{,}330)$
   b) $P''(5; -1{,}036; 7{,}330)$
   c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0{,}866 & -0{,}5 & -2 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}866 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
   d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0{,}866 & -0{,}5 & -2{,}232 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}866 & -0{,}134 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (5; –1,268; 6,196)

2. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (2; 4; –3)
   b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (2; 2; –3)

3. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} x = 4a - 2 \\ y = -2b + 5 \\ z = c + 2 \end{cases}$, où a, b et $c \in [0;1]$.

c) $\begin{cases} x = 4a - 2 \\ y = -2b + 5 \\ z = -c - 2 \end{cases}$, où a, b et $c \in [0;1]$.

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) (–2; 4; 3)

c) $\begin{cases} x = -3a - 2b - 4c \\ y = 4a + 2b + c \\ z = 2a + 3b + c \end{cases}$, où a, b et $c \in [0;1]$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. a) La description vectorielle est :
$(x; y; z) = r(2; 0; 4) + s(1; 4; 0) + t(-2; 3; 2)$,
où $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$ et $r + s + t \le 1$.
La description paramétrique est :
$\begin{cases} x = 2r + s - 2t \\ y = 4s + 3t \\ z = 4r + 2t \end{cases}$,
où $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$ et $r + s + t \le 1$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) (2; 0; 4), (1; –8; 0) et (–2; –6; 2)

d) $\begin{cases} x = 2r + s - 2t \\ y = -8s - 6t \\ z = 4r + 2t \end{cases}$,
où $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$ et $r + s + t \le 1$.

e) $\begin{cases} x = 2r + s - 2t \\ y = -8s - 6t \\ z = 4r + 2t \end{cases}$,
où $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$ et $r + s + t \le 1$.

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x = 2r + s - 2t \\ y = -4r - 2t \\ z = 4s + 3t \end{cases}$,
où $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$ et $r + s + t \le 1$.

g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x = 2r + s - 2t - 3 \\ y = 4s + 3t + 4 \\ z = 4r + 2t + 5 \end{cases}$,
où $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$ et $r + s + t \le 1$.

7. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}866 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0{,}866 & -0{,}5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0{,}866 & 0 & 2{,}83 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 5{,}098 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) (7; 7464; 3)

f) (7; 6,294; 7.9098)