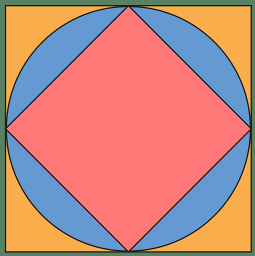
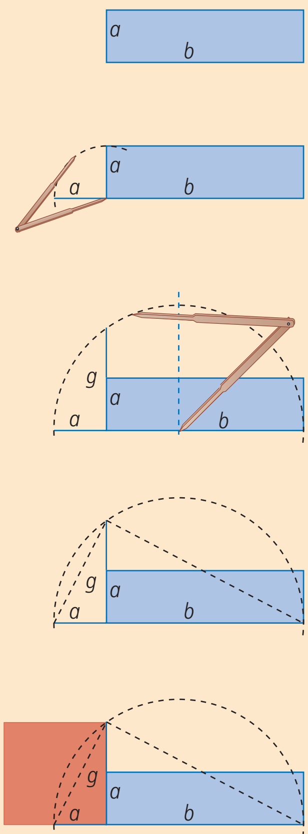


Parmi les problèmes laissés sans réponse par les géomètres grecs, on retrouve la quadrature du cercle, la trisection de l'angle et la duplication du cube. Ce qui a rendu ces problèmes insolubles, c'est la contrainte imposée par Platon. Il fallait résoudre ces problèmes en n'utilisant qu'une règle non graduée et un compas.

Quadratures

Quadrature d'un rectangle



La hauteur du triangle rectangle est la moyenne proportionnelle entre les deux côtés du rectangle, soit le côté du carré de même aire que le rectangle.

Parmi les problèmes qui ont suscité l'intérêt des géomètres grecs, la quadrature des figures occupe une place importante. Un problème de quadrature consiste à construire, à la règle et au compas, un carré dont l'aire est la même que celle d'une figure géométrique donnée.

Quadrature d'un rectangle

Pour construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un rectangle de côtés a et b, on procède de la façon suivante.

À l'aide du compas, on reporte les longueurs des deux côtés bout à bout sur une même droite.

On trace le demi-cercle dont le diamètre est de longueur $a + b$ et on élève la perpendiculaire au point de jonction des segments de longueurs a et b.

En joignant le point d'intersection du demi-cercle et de la perpendiculaire, on forme un triangle rectangle dont le diamètre, $a + b$, est l'hypoténuse.

Puisque tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle et que, dans un triangle rectangle la hauteur est la moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse, on a alors :

$$\frac{a}{g} = \frac{g}{b}$$

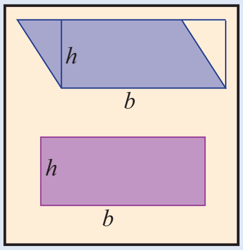
d'où l'on obtient :

$$g^2 = ab.$$

C'est donc dire que g est la longueur du côté du carré dont l'aire est égale à celle du rectangle de côtés a et b. En d'autres mots, la longueur g du côté est la racine carrée du produit ab.

Dans notre explication, nous avons utilisé une écriture moderne pour justifier la démarche, mais celle-ci ne nécessite que l'usage d'une règle non graduée et un compas.

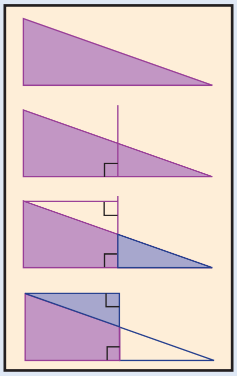
Quadrature d'un parallélogramme



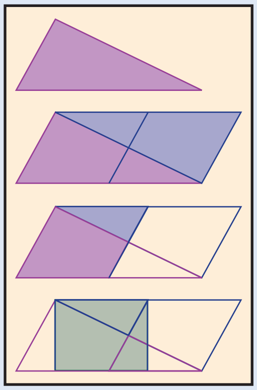
L'aire d'un parallélogramme est égale à l'aire du rectangle de même base et de même hauteur. On peut abaisser cette hauteur à la règle et au compas. C'est la construction consistant à abaisser une perpendiculaire à une droite à partir d'un point hors de cette droite.

Après avoir abaissé cette hauteur, on obtient le rectangle de même aire et on applique la procédure de la quadrature d'un rectangle.

Quadrature d'un triangle



Pour réaliser la quadrature d'un triangle rectangle, on détermine le point milieu d'un des côtés de l'angle droit et on élève la perpendiculaire en ce point. Cette perpendiculaire est parallèle à l'autre côté de l'angle droit. On forme facilement un rectangle ayant la même aire que le triangle rectangle et on applique la procédure de la quadrature d'un rectangle.



Dans le cas d'un triangle quelconque, on trace une parallèle à l'un des côtés pour former un parallélogramme. En joignant les points milieux de deux côtés parallèles, on forme un nouveau parallélogramme dont l'aire est égale à celle du triangle initial. L'aire de ce parallélogramme est égale à celle du rectangle de même base et de même hauteur et on applique la procédure de la quadrature d'un rectangle.

Ces quelques exemples permettent d'illustrer une démarche de résolution de problèmes en mathématiques. Peut-on modifier le problème à résoudre pour se ramener à un problème déjà résolu ?

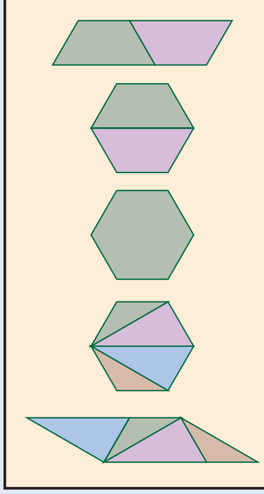
Pour réaliser la quadrature d'un hexagone, par exemple, peut-on construire un parallélogramme ayant la même aire ? Si oui, on peut construire un rectangle de même aire et appliquer la procédure de la quadrature d'un rectangle.

NH Pythagore06

NH Constructions

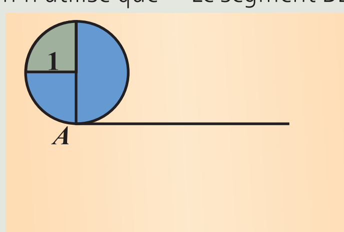
Pythagore09

Aire de l'hexagone

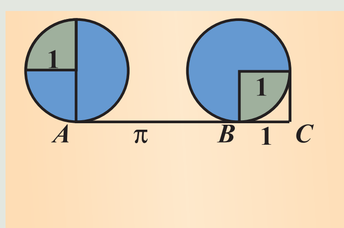


LA QUADRATURE DU CERCLE

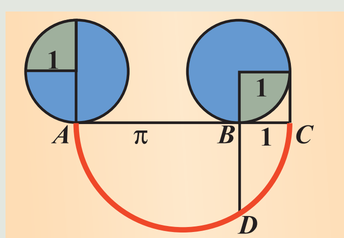
La quadrature du cercle est impossible si on n'utilise que la règle et le compas, selon les contraintes imposées par Platon. On peut cependant réaliser cette quadrature par d'autres moyens.



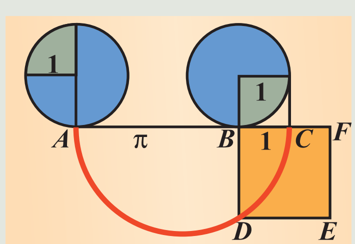
Considérons un cercle de rayon unitaire comme dans la première figure ci-contre. L'aire de ce cercle est π unités carrées et sa circonférence de 2π unités.



Faisons rouler ce cercle sur une droite de façon à effectuer un demi-tour. On obtient ainsi un segment AB de longueur ϖ unités.



Considérons alors le segment AC dont la longueur est π + 1 unités et traçons le demi-cercle de diamètre AC.



Au point B, on élève une perpendiculaire à AB qui coupe l'arc de cercle au point D.

Le segment BD est alors la moyenne géométrique entre les segments AB et BC. On a donc :

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

Par le produit des extrêmes et le produit des moyens, on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= \overline{AB} \times \overline{BC} \\ &= \pi \times 1 \text{ unités carrées.}\end{aligned}$$

Par conséquent, le segment BD est le côté du carré ayant même aire que le cercle de rayon unitaire et le carré BDEF a même aire que le cercle.

On a donc réalisé la quadrature du cercle. Pour tracer les segments de droite on s'est servi de la règle et pour tracer l'arc de cercle, on s'est servi du compas. Cependant, pour faire rouler le cercle sur un segment de droite, la règle et le compas ne sont d'aucune utilité. Cette quadrature ne respecte donc pas les contraintes imposées par Platon.