CHAPITRE 4

MODÈLE AFFINE *en* GESTION

Résoudre des problèmes de gestion à l'aide d'un modèle affine.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la description d'un problème de gestion à l'aide d'un modèle affine;
- la détermination d'un seuil de rentabilité lorsque le prix n'a pas d'incidence sur la demande;
- la détermination du niveau d'indifférence de deux procédés de fabrication;
- la détermination des conditions d'équilibre, prix et quantité à produire.

Seuil de rentabilité 84
Modélisation de situations
Niveau d'indifférence
Exercices 89

Équilibre du marché 91
Prix d'équilibre du marché
Coût unitaire
Grandeurs marginales
Numération et gestion, note historique
Exercices 98

OBJECTIFS

4.1 Déterminer les modèles affines décrivant un coût de production, un revenu ou un profit.

4.2 Déterminer le seuil de rentabilité d'un produit à l'aide des modèles décrivant le coût de production et le revenu.

4.3 Déterminer le seuil de rentabilité d'un produit à l'aide du modèle décrivant le profit.

4.3 Déterminer les conditions d'équilibre d'un marché.

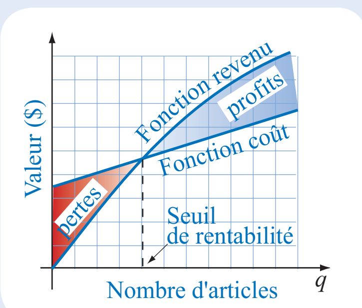
4.1 Seuil de rentabilité

La modélisation affine consiste à déterminer l'équation d'une droite pour décrire le lien entre deux variables. On a vu comment construire un modèle lorsqu'on détient certaines informations comme la pente de la droite et quelques correspondances.

Modélisation de situations

Nous présentons maintenant diverses utilisations du modèle affine relevant du domaine de la gestion. Les notions présentées sont celles de seuil de rentabilité d'un produit et du niveau d'indifférence entre deux procédés de fabrication.

La recherche du seuil de rentabilité est une préoccupation importante en gestion. Ce concept a été développé suite à la révolution industrielle.



Seuil de rentabilité

Le **seuil de rentabilité** d'un produit est le nombre d'unités qu'il faut vendre pour que le revenu soit égal au coût de production.

Graphiquement, le seuil de rentabilité est l'abscisse du point de rencontre entre la fonction représentant le coût de production et la fonction représentant le revenu.

EXEMPLE 4.1.1

ModAffine01

On vous offre la possibilité de louer un comptoir de patates frites pour l'été dans un centre de villégiature au coût de 60 \$ par jour. Ce prix inclut l'équipement, l'emplacement et les services (eau et électricité). Le coût de production comportera également des frais de 0,45 \$ le sac que vous prévoyez vendre 1,25 \$.

a) Représenter graphiquement la fonction revenu et la fonction coût pour une journée d'opération.

b) Quel est le seuil de rentabilité quotidien de ce produit ?

c) Au premier jour d'opération, vous vendez 132 sacs de patates frites. Quel est le profit réalisé pour cette journée ?

d) À la deuxième journée d'opération, la pluie incessante a fait fuir les estivants et vous ne vendez que 22 sacs. Quel est le déficit d'opération pour cette deuxième journée ?

Solution

a) **ÉTAPE 1: Identifier les données et les variables du problème**

Les variables sont q le nombre de sacs de frites, R le revenu et C le coût de production.

ÉTAPE 2: Modéliser mathématiquement.

Le prix de vente d'un sac de patates frites étant de 1,25 $, la fonction décrivant le revenu est

$$R(q) = 1{,}25q \text{ \$}.$$

La production comporte des frais fixes de 60 $ par jour et des frais variables de 0,45 $ l'unité. Le coût de production de q articles est

$$C(q) = 0{,}45q + 60 \text{ \$}.$$

ÉTAPE 3: Utiliser le modèle pour analyser la situation et trouver ce que l'on cherche.

b) Le seuil de rentabilité est l'abscisse du point de rencontre de la fonction revenu et de la fonction coût, on cherche donc q tel que :

$$R(q) = C(q),$$

ce qui donne :

$$1{,}25q = 0{,}45q + 60,$$
$$0{,}80q = 60,$$
$$q = 75.$$

c) À la première journée, le revenu est :

$$R(132) = 1{,}25 \times 132 = 165 \text{ \$}.$$

et le coût de production est

$$C(132) = 0{,}45 \times 132 + 60 = 119{,}40 \text{ \$}.$$

Le profit est donc 165 – 119,40 = 45,60 $.

d) À la deuxième journée, le revenu est

$$R(22) = 1{,}25 \times 22 = 27{,}50 \text{ \$}$$

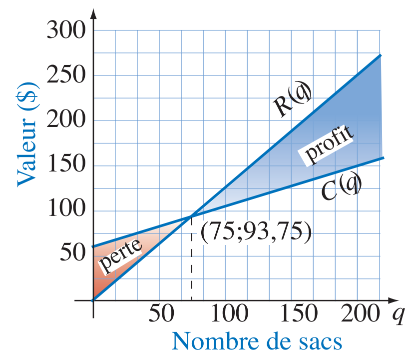
et le coût de production est

$$C(22) = 0{,}45 \times 22 + 60 = 69{,}90 \text{ \$}.$$

Le profit est donc 27,50 – 69,90 = –42,40 $. C'est un profit négatif donc une perte.

REMARQUE

Les frais fixes sont souvent donnés pour un intervalle de temps (p. ex. sur une base quotidienne, hebdomadaire, mensuelle, etc.). Il faut en tenir compte lors des calculs et lors de l'interprétation des résultats.



REMARQUE

Lorsque le nombre d'articles vendus est plus petit que le seuil de rentabilité, la compagnie essuie une perte et lorsqu'il est plus grand que le seuil, la compagnie fait un profit. Le seuil de rentabilité est le nombre d'articles, produits et vendus, pour lequel le profit est nul.

Profit

Le **profit** réalisé par la vente de q unités d'un produit est la différence entre le revenu engendré par la vente de ces q unités et leur coût de production. La fonction profit est donc définie par :

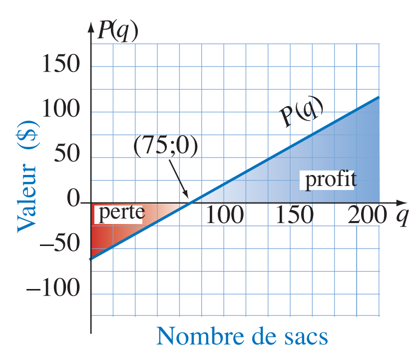
$$P(q) = R(q) - C(q).$$

ModAffine02

Dans l'exemple précédent, la fonction profit est définie par :

$$\begin{aligned} P(q) &= R(q) - C(q) \\ &= 1{,}25q - (0{,}45q + 60) \\ &= 1{,}25q - 0{,}45q - 60 \\ &= 0{,}80q - 60. \end{aligned}$$

La fonction $P(q) = 0{,}8q - 60$ est une droite dont la pente est de 0,8 et dont l'ordonnée à l'origine et –60 $. L'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe horizontal est le seuil de rentabilité du produit. C'est le nombre de sacs pour lequel le profit est nul car le revenu est égal au coût de production.



REMARQUE
La fonction profit n'est pas toujours une droite. À la prochaine section, nous verrons des situations pour lesquelles le profit est décrit par une fonction quadratique. Cela intervient lorsqu'on tient compte du fait qu'une modification du prix a un impact sur la demande.

PROCÉDURE

Analyse de la rentabilité d'un produit (prix constant)

1. Établir le coût de production en fonction du nombre d'articles.
2. Établir le revenu en fonction du nombre d'articles.
3. Analyser la situation à l'aide des modèles.
   a) Représenter graphiquement les deux fonctions.
   b) Trouver l'abscisse du point de rencontre de la fonction coût et de la fonction revenu (seuil de rentabilité).
   c) Interpréter le résultat selon le contexte et faire les recommandations pertinentes.

EXEMPLE 4.1.2

Avant de débuter la production d'un nouveau produit, le Conseil d'administration de l'entreprise qui vous emploie vous demande d'en faire l'étude de rentabilité. Pour produire cet article, il faudrait procéder à l'achat d'appareils dont le paiement serait effectué par des mensualités de 1 600 $. De plus, il faut prévoir un coût de 25 $ l'unité et le prix de vente envisagé est de 110 $.

a) Déterminer la fonction décrivant le profit mensuel.
b) Calculer le profit réalisé par la vente de 16 articles par mois.
c) Calculer le profit réalisé par la vente de 28 articles par mois.
d) Représenter graphiquement la fonction décrivant le profit et déterminer le seuil de rentabilité mensuel de ce produit.
e) Quelle recommandation faut-il faire au Conseil d'administration?

Solution

a) **ÉTAPE 1: Identifier les données et les variables du problème**

Soit q, le nombre d'articles produits et vendus, C, le coût de production de ces q articles, R, le revenu provenant de la vente de ces q articles et P, le profit.

ÉTAPE 2: Modéliser mathématiquement

Puisque les paramètres des modèles sont donnés, on peut écrire directement ceux-ci. La fonction décrivant le coût de production est :

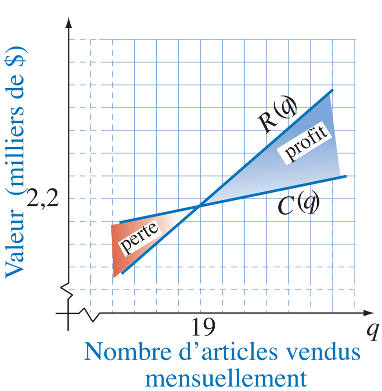
$$C(q) = 25q + 1\,600 \text{ \$}.$$

La fonction revenu est

$$R(q) = 110q \text{ \$}.$$

Le profit est donné par $P(q) = R(q) - C(q)$, d'où :

$$P(q) = 85q - 1\,600 \text{ \$}.$$



ÉTAPE 3: Utiliser le modèle pour analyser la situation et trouver ce que l'on cherche

b) En vendant 16 articles par mois, on a :

$$P(16) = 1\,360 - 1\,600 = -240 \text{ \$}.$$

Soit une perte mensuelle de 240 $.

c) En vendant 28 articles par mois, on a :

$$P(28) = 2\,380 - 1\,600 = 780 \text{ \$}.$$

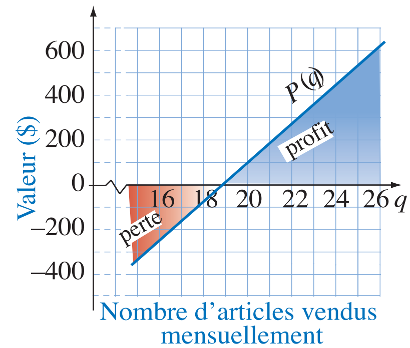
Soit un profit mensuel de 780 $.

d) Le seuil de rentabilité est le nombre d'articles pour lequel le profit est nul, soit

$$85q - 1\,600 = 0, \text{ d'où } q = 18{,}8$$

Il faut donc vendre 19 articles par mois pour que la production soit rentable.

e) Il faut recommander de produire seulement s'il est possible de vendre au moins 19 unités par mois, sinon la production ne sera pas rentable. Le conseil devrait faire une étude de marché pour savoir si, à ce prix, le volume de vente serait suffisant pour rentabiliser la production.



Niveau d'indifférence

Nous utiliserons maintenant le modèle affine pour comparer des processus de fabrication et déterminer le nombre d'unités pour lequel le coût de fabrication est le même pour les deux processus. Cette procédure permet de déterminer s'il est avantageux d'apporter des changements au procédé de fabrication en tenant compte du nombre d'articles vendus. Ainsi, une modernisation des équipements est une modification au procédé de fabrication pour lequel il faut investir. Quel doit être le niveau des ventes pour que cet investissement soit rentable?

REMARQUE

Lorsque les processus sont des procédés de fabrication, le niveau d'indifférence correspond au nombre d'unités qu'il faut produire pour que le coût de fabrication soit le même pour les deux procédés. Le niveau d'indifférence est distinct du seuil de rentabilité. Le niveau d'indifférence est donné, comme le seuil de rentabilité, en terme d'unités produites; il faut cependant savoir différencier ces concepts.

ModAffine0

Niveau d'indifférence

Le **niveau d'indifférence** de deux processus est le nombre d'unités pour lequel le coût est le même pour les deux processus.

PROCÉDURE

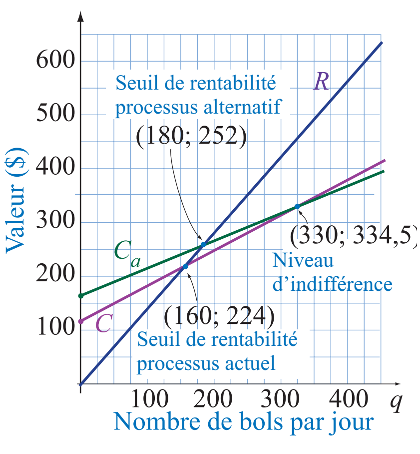
Rentabilité de deux processus (situation à prix constant)

1. Établir le coût de production en fonction du nombre d'articles pour chacun des processus.
2. Établir le revenu en fonction du nombre d'articles.
3. Analyser la situation à l'aide des modèles.
   a) Représenter graphiquement les trois fonctions.
   b) Trouver l'abscisse du point de rencontre des deux fonctions coûts (niveau d'indifférence).
   c) Trouver l'abscisse du point de rencontre de chacune des fonctions coût et de la fonction revenu (seuil de rentabilité de chacun des processus).
   d) Interpréter les résultats selon le contexte et faire les recommandations pertinentes.

EXEMPLE 4.1.3

Vous gérez le casse-croûte « À la soupe du jour » dans un centre d'achats. Vous servez exclusivement des soupes en changeant la recette chaque jour. Le coût d'opération (loyer, électricité, etc.) est de 120 $ par jour. Les légumes que vous utilisez sont achetés déjà pelés et coupés

REMARQUE
Dans l'exemple ci-contre, la variable indépendante est une variable discrète, ce qui signifie qu'elle ne peut prendre n'importe quelle valeur même si on utilise un modèle continu pour analyser la situation. En effet, le nombre de bols de soupe vendus est nécessairement un nombre entier. Si le modèle donnait un nombre comportant une partie décimale, comme 156,2, il faudrait considérer que le seuil ou le niveau d'indifférence est l'entier supérieur à la valeur donnée par le modèle mathématique.



REMARQUE
On peut noter que, dans l'intervalle entre le seuil de rentabilité du nouveau processus et le niveau d'indifférence, le profit réalisé est moins élevé avec le processus alternatif à cause des investissements qu'il nécessite. Par ailleurs, lorsque le niveau d'indifférence est dépassé, le profit réalisé est plus grand avec le processus alternatif. Il ne suffit pas de tenir compte seulement du seuil de rentabilité dans la décision d'implanter un nouveau processus, il faut s'assurer qu'il procurera une meilleure rentabilité de l'entreprise.

en dés. Le coût de préparation d'un bol de soupe est de 0,65 \$ et vous le vendez 1,40 \$.

a) Décrire mathématiquement le coût de production et le revenu quotidien. Calculer le seuil de rentabilité.

b) Vous envisagez l'achat d'un appareil pour peler et couper les légumes en dés. La préparation d'un bol de soupe reviendrait alors à 0,55 \$ mais l'achat à crédit de cet appareil ferait grimper les frais fixes à 153 \$ par jour. Décrire mathématiquement le coût de production si vous faites cet achat. Calculer le seuil de rentabilité alternatif.

c) Représenter graphiquement les modèles et calculer le niveau d'indifférence.

d) Sachant que vous servez en moyenne 420 soupes par jour, devez-vous faire l'achat de cet appareil?

Solution

a) **ÉTAPE 1: Identifier les données et les variables du problème**

Soit q, le nombre de bols de soupe produits et vendus, C, le coût de production de ces q bols, R, le revenu généré par la vente de ces q bols et P, le profit.

ÉTAPE 2: Modéliser mathématiquement

Le revenu est $R(q) = 1{,}40q$ \$

et le coût de production est $C(q) = 0{,}65q + 120$ \$..

Le seuil de rentabilité est atteint lorsque $1{,}40q = 0{,}65q + 120$, ce qui donne $q = 160$ bols.

b) Représentons par C_a le coût alternatif, c'est-à-dire le coût de production si on modifie le procédé de fabrication en achetant la machine pour peler et couper les légumes. On a alors :

$$C_a(q) = 0{,}55q + 153 \text{ \$}.$$

Dans ce cas, le seuil de rentabilité est atteint lorsque :

$$1{,}40q = 0{,}55q + 153,$$

ce qui donne $q = 180$ bols.

ÉTAPE 3: Analyser la situation à l'aide des modèles

c) Le niveau d'indifférence est le nombre de bols pour lequel le coût de production est le même. On cherche donc la valeur de q telle que

$$C(q) = C_a(q)$$

ce qui donne : $0{,}65q + 120 = 0{,}55q + 153$,

d'où : $0{,}1q = 33$

et : $q = 330$ bols.

d) **Rédaction de la conclusion**

Le nombre moyen de soupes servies à chaque jour étant supérieur au niveau d'indifférence, il est avantageux d'acheter l'appareil, c'est-à-dire de choisir le processus alternatif de production. On peut confirmer la pertinence de ce choix. Le nombre de soupes servies est, en moyenne, 420 par jour. Le coût actuel pour produire ces soupes est $C(420) = 393$ \$ et le coût alternatif est $C_a(420) = 384$ \$. On peut estimer, compte tenu du volume de ventes actuel, que l'économie sera de 9 \$ par jour.

4.2 Exercices

1. Une entreprise gère un restaurant dans le centre-ville. Ce restaurant offre sur l'heure du dîner un bar à salade très prisé par le personnel de bureau. Les clients se servent eux-mêmes au bar à salade et peuvent consommer à volonté pour un coût de 5,50 $. Cependant l'expérience démontre que le coût moyen des denrées consommées est de 2,85 $ par personne. De plus, l'entreprise doit assumer des frais fixes de 106 $ pour la préparation.
   a) Déterminer le nombre de repas qu'il faut servir à chaque jour pour atteindre le seuil de rentabilité.
   b) Représenter graphiquement cette situation.
   c) Déterminer la fonction décrivant le profit réalisé en fonction du nombre de repas vendus quotidiennement. Représenter graphiquement.
   d) Quel sera le profit réalisé par la vente de 20 repas ?
   e) Quel sera le profit réalisé par la vente de 65 repas ?

2. Vous gérez un bar à crème glacée molle dans un centre d'achats. Vous devez assumer des frais fixes de 60 $ par jour (location de l'emplacement, appareillage, électricité). Vous devez également assumer des frais variables de 30 ¢ du cornet.
   a) Quelles sont les variables indépendante et dépendante de cette situation ?
   b) Trouver un modèle mathématique permettant de décrire le coût de production quotidien en fonction du nombre de cornets vendus.
   c) Sachant que les cornets sont vendus 60 ¢ l'unité, trouver le modèle mathématique décrivant le revenu quotidien en fonction du nombre de cornets vendus.
   d) Déterminer le seuil de rentabilité, c'est-à-dire, le nombre de cornets que vous devez vendre à chaque jour pour que l'entreprise soit rentable. Représenter graphiquement.
   e) Déterminer la fonction décrivant le profit quotidien réalisé en fonction du nombre de cornets vendus. Représenter graphiquement la relation et l'interpréter.
   f) On vous offre une nouvelle machine dont les coûts d'opération sont moins élevés et qui occasionne moins de pertes de matière première. L'acquisition de cette nouvelle machine augmenterait les frais fixes à 71,40 $ par jour, mais diminuerait les frais variables à 26 ¢ du cornet. Quel serait alors le seuil de rentabilité ?
   g) Quel est le niveau d'indifférence pour ces deux processus ? Interpréter ce résultat.
   h) Sachant que vous vendez en moyenne 380 cornets par jour, est-il avantageux pour vous d'acheter ce nouvel équipement ?

3. On vous demande de comparer les propositions de deux entreprises de location d'automobiles qui affichent les coûts suivants pour une semaine de location:
   Entreprise A: 139,95 $ plus 0,27 $ du kilomètre;
   Entreprise B: 169,95 $ plus 0,25 $ du kilomètre.
   a) Décrire mathématiquement la correspondance entre la distance parcourue et le coût de location hebdomadaire pour chacune des entreprises.
   b) Trouver le coût de location pour un voyage de 520 kilomètres effectué en trois jours pour chacune des entreprises.
   c) Esquisser le graphique de ces fonctions.
   d) Trouver le niveau d'indifférence et interpréter.

4. La compagnie de construction qui vous emploie donne en sous-traitance la finition des planchers de bois franc qu'elle pose. Vous devez faire l'analyse des offres de deux compagnies concurrentes dont les coûts sont calculés de la façon suivante:
   Entreprise A: 200 $ de frais fixes et 5 $ du mètre carré;
   Entreprise B: 120 $ de frais fixes et 6 $ du mètre carré.
   a) Décrire mathématiquement la correspondance entre la superficie et le coût pour chacune des entreprises.
   b) Trouver, pour chacune des entreprises, le coût de finition pour 20 m^2 de plancher.
   c) Trouver, pour chacune des entreprises, le coût de finition pour 80 m^2 de plancher.
   d) Esquisser le graphique de ces fonctions.
   e) Trouver le niveau d'indifférence et interpréter.

5. Vous êtes propriétaire d'un petit comptoir qui offre des bagels fourrés à sa clientèle. Vous avez calculé que les ingrédients utilisés vous coûtent en moyenne 1,75 $ du bagel, mais vous devez de plus assumer des frais fixes de 160 $ par jour.
   a) Quelles sont les variables indépendante et dépendante de cette situation ?
   b) Trouver un modèle mathématique permettant de décrire le coût de production quotidien en fonction du nombre de bagels vendus.
   c) Sachant que les bagels sont vendus 2,60 $ l'unité, trouver le modèle mathématique décrivant le revenu quotidien en fonction du nombre de bagels vendus.
   d) Déterminer le seuil de rentabilité, c'est-à-dire le nombre de bagels que vous devez vendre à chaque jour pour que l'entreprise soit rentable.
   e) Déterminer la fonction décrivant le profit quotidien réalisé en fonction du nombre de bagels vendus. Représenter graphiquement.
   f) On vous offre une nouvelle machine qui prépare la pâte des bagels ainsi qu'un four pour les cuire. L'achat de ces équipements ferait augmenter les frais fixes à 195 $ par jour, mais vous n'auriez plus à acheter les bagels déjà cuits et chaque bagel vous coûterait alors 1,50 $. Quel serait alors le seuil de rentabilité ?
   g) Quel est le niveau d'indifférence pour ces deux processus ? Représenter graphiquement.
   h) Sachant que vous vendez en moyenne 420 bagels par jour, est-il avantageux pour vous d'acheter ce nouvel équipement ?

6. On vous demande de comparer les propositions de deux entreprises de location de camionnettes qui affichent les coûts suivants pour une location hebdomadaire:

   Entreprise A: 539,95$ plus 0,20 $ du kilomètre.

   Entreprise B: 349,95 $ plus 0,35 $ du kilomètre
   a) Décrire mathématiquement la correspondance entre la distance parcourue et le coût de location hebdomadaire pour chacune des entreprises.
   b) Trouver le coût de location pour un voyage de 400 kilomètres effectué en quatre jours pour chacune des entreprises.
   c) Esquisser le graphique de ces fonctions.
   d) Trouver le niveau d'indifférence et interpréter.
   e) Le voyage que vous envisagez vous amènera à parcourir 1 200 km en cinq jours, quelle entreprise devriez-vous choisir ?
   f) Si le voyage de 1 200 km exige huit jours de route, quelle entreprise devriez-vous choisir ?

7. Vous désirez faire asphalter votre entrée de garage et vous avez fait appel à deux compagnies pour obtenir des soumissions. Vous avez obtenu les données suivantes:

   Entreprise *A*: 460 $ de frais fixes et 40 $ du mètre carré.

   Entreprise *B*: 100 $ de frais fixes et 60 $ du mètre carré.
   a) Décrire mathématiquement la correspondance entre la superficie à couvrir et le coût pour chacune des entreprises.
   b) Trouver le coût pour une superficie de 20 m^2 pour chacune des entreprises.
   c) Esquisser le graphique de ces fonctions.
   d) Trouver le niveau d'indifférence et interpréter.

8. Une entreprise a un coût de production mensuel décrit par $C(n) = 30n + 15\,750$ pour un des articles qu'elle produit dont le prix de vente est de 75 $.
   a) Donner la fonction décrivant le profit mensuel et représenter graphiquement.
   b) À quoi correspond l'abscisse à l'origine de cette fonction ?
   c) Un nouveau procédé de fabrication permettrait de diminuer les frais variables à 25 $ mais augmenterait les frais fixes mensuels à 25 500 $. Déterminer la fonction profit dans ce cas. Comparer le profit mensuel réalisé selon les deux procédés.
   d) Trouver le niveau d'indifférence et interpréter.
   e) Quel conseil donneriez-vous à cette entreprise ?

4.3 Équilibre du marché

En économie, on rencontre différentes situations dont la solution implique la recherche du point de rencontre de deux courbes. Une de ces situations est basée sur la **loi de l'offre et de la demande**.

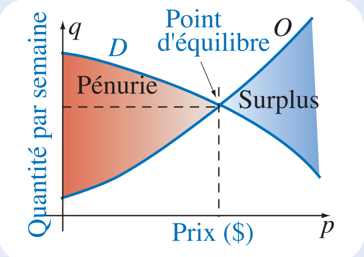
Prix d'équilibre du marché

Le prix d'équilibre du marché détermine le nombre d'unités que les fabricants sont prêts à offrir. Lorsque le prix augmente, les fabricants sont intéressés à produire plus. Par ailleurs, le prix du marché détermine également le nombre d'unités que les consommateurs sont prêts à acheter. Lorsque le prix augmente, les consommateurs sont moins intéressés à acheter le produit. Le point de rencontre des graphiques des fonctions décrivant l'offre et la demande est appelé le **point d'équilibre** du marché. C'est le prix pour lequel l'offre est égale à la demande. À ce prix, il n'y a ni pénurie ni surplus du produit. Dans un marché de libre concurrence, la loi de l'offre et de la demande stipule que le prix de vente tend vers son point d'équilibre.

Lorsque le prix est inférieur au prix d'équilibre, la demande est supérieure à l'offre. Face à cette pénurie, les commerçants sont portés à hausser les prix, ce qui entraîne un accroissement de la production de façon à ce que l'offre rejoigne la demande. Lorsque le prix est supérieur au prix d'équilibre, les gens étant moins intéressés à acheter, la demande est inférieure à l'offre. Il y a alors surplus de stocks, les commerçants sont portés à baisser les prix pour écouler les surplus. Ce qui entraîne une diminution de la production de façon à ce que l'offre rejoigne la demande.

Prix d'équilibre du marché

Le **prix d'équilibre du marché** est le prix pour lequel l'offre est égale à la demande, c'est-à-dire pour lequel il n'y a ni pénurie ni surplus. À un prix plus bas, les consommateurs seraient plus nombreux, mais les fabricants seraient moins intéressés à produire, il y aurait pénurie. À un prix plus élevé, les consommateurs seraient moins intéressés à acheter et les manufacturiers seraient intéressés à produire plus, il y aurait surplus de production.



EXEMPLE 4.3.1

Une étude de marché a permis de déterminer que l'offre mensuelle pour un produit en fonction du prix est décrite par $O(p) = 0{,}5p + 150$ alors que la demande mensuelle est décrite par $D(p) = 300 - p$

Trouver le prix d'équilibre du marché et déterminer combien d'unités peuvent être vendues mensuellement.

REMARQUE
Une variation directement proportionnelle est de la forme $y = ax$ et une variation inversement proportionnelle est de la forme $y = a/x$.

■ ***Solution***

L'offre est égale à la demande lorsque

$$0,5p + 150 = 300 - p$$
$$1,5p = 150$$
$$p = 100.$$

Le prix d'équilibre est donc de 100 $ et le nombre d'articles vendus peut être obtenu en calculant $O(100)$ ou encore $D(100)$, ce qui donne

$O(100) = 0,5 \times 100 + 150 = 200$ unités

Le problème est simple lorsqu'on connaît les fonctions décrivant l'offre et la demande. Dans la réalité, il faut les trouver et, pour ce faire, il faut procéder à des études plus approfondies. La droite de régression est alors un outil intéressant.

PROCÉDURE

Calcul du prix d'équilibre du marché pour un produit

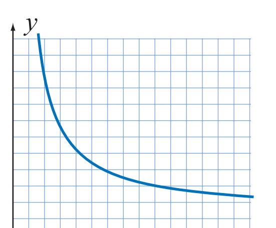
Le prix d'équilibre du marché est l'abscisse du point de rencontre de la fonction décrivant l'offre en fonction du prix et de la fonction décrivant la demande en fonction du prix.

1. Établir les fonctions d'offre et de demande.
2. Représenter graphiquement ces fonctions.
3. Calculer l'abscisse du point de rencontre des deux fonctions.

Coût unitaire

ModAffine04

Avant de modéliser le coût unitaire, rappelons la notion de variation inversement proportionnelle présentée au chapitre 2.



Variation inversement proportionnelle

Variation inversement proportionnelle

Si la relation entre deux variables x et y est telle que leur produit est égal à une constante, soit $yx = a$, on dit que y **varie de façon inversement proportionnelle** à x. Pour bien faire ressortir que y est une fonction de x, on représente les variations inversement proportionnelles sous la forme :

$$y = \frac{a}{x}, \text{ où } a \text{ est un paramètre.}$$

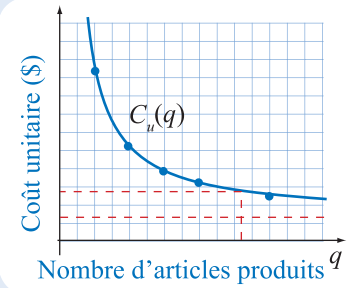
Lorsque la valeur de la variable indépendante devient très grande, la valeur de la variable dépendante tend vers 0. Le graphique de la fonction se rapproche alors de plus en plus d'une droite horizontale qu'on appelle l'**asymptote horizontale** de la fonction. De plus, lorsque la variable indépendante s'approche de 0, la variable dépendante devient très grande. Le graphique de la fonction se rapproche alors de plus en plus d'une droite verticale qu'on appelle **asymptote verticale** de la fonction.

Coût unitaire

Le **coût unitaire** pour la fabrication de q unités d'un produit est, noté C_u, et défini par le quotient du coût de production de ces unités par le nombre q d'unités, soit :

$$C_u(q) = \frac{C(q)}{q},$$

où q est le nombre d'articles produits, $C(q)$ est le coût de production de ces articles et $C_u(q)$ est le coût unitaire.



EXEMPLE 4.3.2

La compagnie qui vous emploie fabrique un produit dont le coût est

$$C(q) = 2q + 50 \text{ \$}.$$

a) Déterminer la fonction qui décrit le coût unitaire de production.

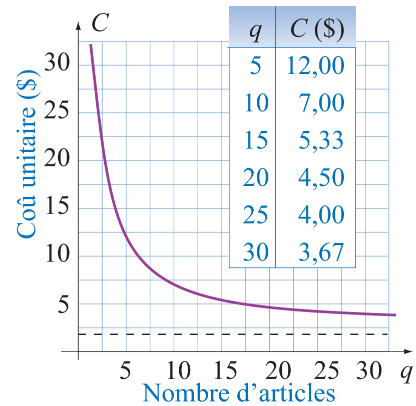
b) Représenter graphiquement cette fonction.

Solution

a) Le coût unitaire est décrit par

$$C_u(q) = \frac{2q+50}{q} = 2 + \frac{50}{q} \text{ \$}.$$

b) Pour représenter graphiquement, on peut calculer quelques points et obtenir la courbe ci-contre. On peut constater que cette fonction est une somme dont l'un des termes est $50/q$. La variation de ce terme est inversement proportionnelle au nombre d'articles produits.



q	C ($)
5	12,00
10	7,00
15	5,33
20	4,50
25	4,00
30	3,67

EXEMPLE 4.3.3

Une entreprise qui fabrique des bibelots en plastique moulé envisage l'achat d'une matrice pour fabriquer des figurines. Le coût de la matière première est de 1,25 $ par figurine et les coûts fixes (appareillage, loyer, entretien) sont de 403 $ par mois. On prévoit vendre les figurines 2,80 $ chacune.

a) Décrire mathématiquement les fonctions coût de production et revenu mensuel. Représenter graphiquement.

b) Décrire mathématiquement la fonction profit mensuel. Représenter graphiquement et interpréter.

c) Calculer le seuil de rentabilité. Indiquer la signification graphique de ce seuil dans les graphiques des parties a) et b).

d) Décrire mathématiquement la fonction donnant le coût unitaire pour fabriquer q figurines. Représenter graphiquement.

e) Calculer le coût unitaire associé au seuil de rentabilité.

ModAffine05

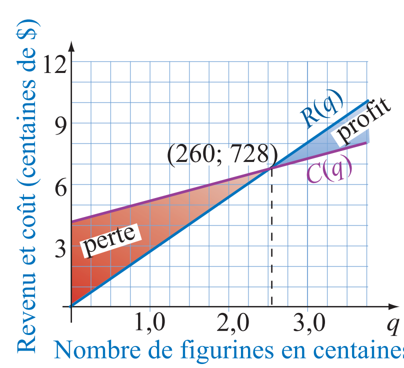
REMARQUE

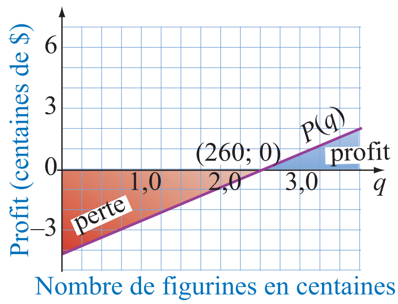
Les frais fixes sont répartis sur le nombre d'articles vendus. Plus ce nombre est grand, plus le prix est avantageux pour le consommateur.

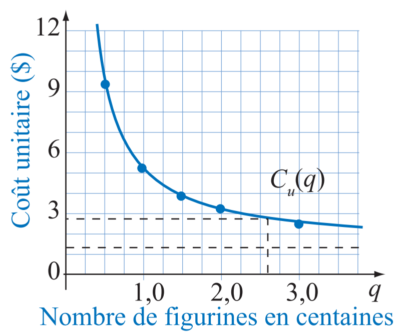
Solution

a) Soit q le nombre de figurines, C le coût de production et R le revenu. On a alors :

$$C(q) = 1{,}25q + 403 \text{ \$},$$
$$R(q) = 2{,}80q \text{ \$}.$$







REMARQUE

On peut choisir le seuil de rentabilité du produit et calculer le coût moyen qui représentera alors le prix de vente qu'il faudra fixer.

b) Le profit mensuel généré par la vente de q unités est donné par le revenu moins le coût de production. On a donc :

$$\begin{aligned} P(q) &= 2{,}80q - (1{,}25q + 403) \\ &= 2{,}80q - 1{,}25q - 403 \\ &= 1{,}55q - 403 \text{ \$.} \end{aligned}$$

c) Le seuil de rentabilité est le nombre d'articles pour lequel le profit est nul, on cherche donc q tel que :

$$1{,}55q - 403 = 0,$$
$$1{,}55q = 403,$$
$$q = 260.$$

La compagnie fait un profit si elle vend plus de 260 figurines. Si elle en vend exactement 260, son profit est nul et si elle en vend moins de 260, elle essuie une perte. Le seuil de rentabilité est l'abscisse du point d'intersection des fonctions revenu et coût, mais c'est également le zéro de la fonction profit.

d) Le coût unitaire de q figurines est donné par :

$$C_u(q) = \frac{1{,}25q + 403}{q} = 1{,}25 + \frac{403}{q} \text{ \$.}$$

e) Le coût unitaire pour 260 figurines est :

$$C_u(260) = 1{,}25 + \frac{403}{260} = 2{,}80 \text{ \$.}$$

Le coût unitaire au seuil de rentabilité est le prix de vente de l'article à ce seuil. En vendant 260 articles à ce prix, le profit sera nul. Ce qui est normal puisqu'on a déterminé le seuil de rentabilité en considérant que le prix de vente était de 2,80 $.

Dans l'exemple 4.3.2, si on souhaite que le seuil de rentabilité soit de 40 unités, le coût moyen sera

$$C_u(40) = 2 + \frac{50}{40} = 3{,}25 \text{ \$.}$$

On doit fixer à 3,25 $, le seuil de rentabilité soit de 40 unités.

PROCÉDURE

Calcul du coût moyen (ou coût unitaire)

1. Établir $C(n)$ le coût de production en fonction du nombre d'articles produits.
2. Établir $C(n)/n$ le coût moyen en fonction du nombre d'articles produits.
3. Identifier l'asymptote de la fonction décrivant le coût moyen.
4. Représenter graphiquement ces fonctions.
5. Calculer, à l'aide de la fonction décrivant le coût moyen, le seuil de rentabilité pour un prix de vente donné.
6. Calculer, à l'aide de la fonction décrivant le coût moyen, le prix de vente qu'il faut fixer pour un seuil de rentabilité donné.
7. Analyser les résultats selon le contexte.

Grandeurs marginales

Coût marginal

Le **coût marginal** de la q^e unité d'un produit, noté $C_m(q)$, est le coût engendré par la fabrication de cette q^e unité. Il est défini de la façon suivante :

$$C_m(q) = \frac{C(q) - C(q-1)}{q-(q-1)} = C(q) - C(q-1) \ \$/\text{unité}.$$

Lorsque le coût de production est décrit par un modèle affine, le coût marginal est la pente de la droite. Ainsi, dans l'exemple précédent, le coût marginal est de 1,25 \$. En effet, on a

$$\begin{aligned} C_m(n) &= C(n) - C(n-1) \\ &= 1{,}25n + 403 - [1{,}25(n-1) + 403] = 1{,}25\,\$. \end{aligned}$$

Revenu marginal

Le **revenu marginal** de la q^e unité d'un produit, noté $R_m(q)$, est le revenu généré par la vente de cette q^e unité. Il est défini de la façon suivante :

$$R_m(q) = \frac{R(q) - R(q-1)}{q-(q-1)} = R(q) - R(q-1) \ \$/\text{unité}.$$

Profit marginal

Le **profit marginal** de la q^e unité d'un produit, noté $P_m(q)$, est le profit généré par la vente de cette q^e unité. Il est défini comme suit :

$$P_m(q) = \frac{P(q) - P(q-1)}{q-(q-1)} = P(q) - P(q-1) \ \$/\text{unité}.$$

Dans les situations présentées jusqu'à maintenant, le revenu et le profit étaient décrits par des modèles affines. Dans ces cas, le revenu marginal et le profit marginal sont donnés par la pente de la droite représentant graphiquement ces fonctions, le revenu marginal et le profit marginal sont donc constants. Au prochain chapitre, nous rencontrerons des situations pour lesquelles la fonction revenu et la fonction profit ne sont pas des fonctions affines. Les concepts resteront les mêmes, mais le revenu marginal et le profit marginal ne seront pas constants.

EXEMPLE 4.3.4

Une compagnie qui fabrique des objets en plastique moulé envisage l'achat d'une matrice pour fabriquer des vases à fleurs. Le coût de la matière première est de 1,55 \$ par vases et les coûts fixes (appareillage, loyer, entretien) sont de 600 \$ par mois. On prévoit vendre les vases 3,50 \$ chacun.

a) Décrire mathématiquement les fonctions coût de production mensuel et revenu mensuel. Représenter graphiquement.

b) Décrire mathématiquement la fonction profit mensuel. Représenter graphiquement et interpréter.

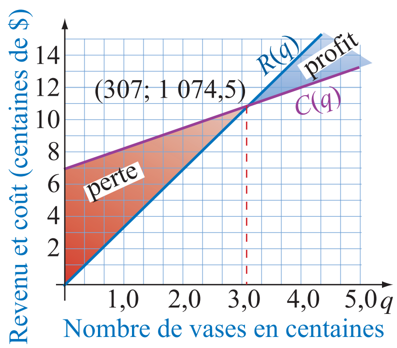
c) Calculer le seuil de rentabilité. Indiquer la signification graphique de ce seuil dans les graphiques des parties a) et b).

d) Décrire mathématiquement la fonction donnant le coût moyen pour fabriquer q vases. Représenter graphiquement.

e) Calculer le coût moyen associé au seuil de rentabilité.

f) Calculer le profit marginal.

Solution



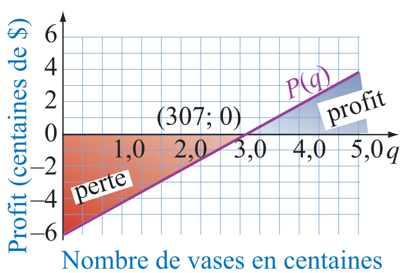
a) Soit n le nombre de vases, C le coût de production et R le revenu. On a alors

$C(q) = 1{,}55q + 600$

$R(q) = 3{,}50q$

b) Le profit mensuel généré par la vente de n unités est donné par le revenu moins le coût de production. On a donc

$$\begin{aligned} P(q) &= 3{,}50q - (1{,}55q + 600) \\ &= 3{,}50q - 1{,}55q - 600 \\ &= 1{,}95q - 600 \end{aligned}$$



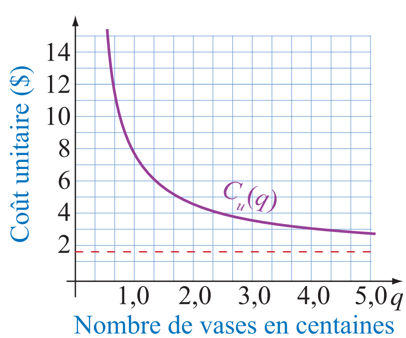
c) Le seuil de rentabilité est le nombre d'articles pour lequel le profit est nul, on cherche donc n tel que

$$\begin{aligned} 1{,}95q - 600 &= 0 \\ 1{,}95q &= 600 \\ q &= 307{,}69. \end{aligned}$$

La compagnie fait un profit si elle vend plus de 308 vases par mois. Si elle en vend moins de 308, elle essuie une perte. Le seuil de rentabilité est l'abscisse du point d'intersection des fonctions revenu et coût, mais c'est également l'abscisse à l'origine de la fonction profit.

d) Le coût moyen de q vases est donné par

$$C_u(q) = \frac{1{,}55n + 600}{q} = 1{,}55 + \frac{600}{q}.$$



e) Le coût moyen pour 308 vases est

$$C_u(308) = 1{,}55 + \frac{600}{308} = 3{,}50\$.$$

Le coût moyen au seuil de rentabilité est le prix de vente de l'article.

f) Le profit marginal du q^e exemplaire est la différence de profit entre le q^e exemplaire et le $(q - 1)^e$ exemplaire. Puisque le profit est décrit par une fonction affine, le profit marginal est la pente de la droite, soit

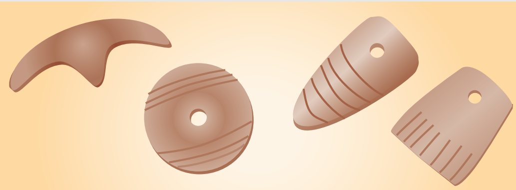
$$P_m = 1{,}55 \text{ \$/unité}$$

Un peu d'histoire

NUMÉRATION ET GESTION

Les premiers modes de numération ont consisté à faire des marques sur un bâton ou sur un os afin de garder mémoire de la quantité de biens possédés. Une autre façon de faire était de garder dans un sac une quantité de cailloux égale au nombre de biens. Par exemple, pour garder mémoire du nombre de têtes dans un troupeau de moutons que l'on confiait à un gardien pour les mener aux pâturages, on pouvait conserver un sac contenant autant de cailloux qu'il y avait de moutons dans le troupeau. Le propriétaire et le gardien ayant chacun leur sac contenant la même quantité de cailloux pouvaient vérifier au retour des pâturages que le troupeau était intact (Numération01).

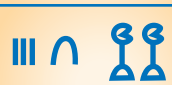
Dès la formation des premières sociétés agraires, il a fallu développer des systèmes de numération plus évolués pour faciliter la gestion des denrées et le commerce. Il a fallu également développer des unités de mesure des volumes pour les produits agricoles. Ces premières sociétés se sont implantées dans une région du Moyen-Orient que l'on appelle « Croissant fertile ». Les recherches archéologiques ont permis de mettre au jour une méthode de comptabilisation à l'aide de jetons-calculis.



Jetons représentant des denrées dont les stries indiquent la quantité de cette denrée

2013 dans le système babylonien

2013 dans le système maya



2013 dans le système égyptien

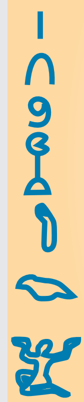
MMXIII

2013 dans le système romain

Pour répondre aux besoins du commerce, ces modes de numération ont évolués pour devenir de véritables systèmes de numération dans lesquels on peut effectuer des opérations : addition, soustraction, multiplication et division. Les différents systèmes développés au cours des siècles sont de trois types : les systèmes additifs, les systèmes positionnels et les systèmes mixtes ou semi-positionnels. Cette classification ne représente pas les étapes d'une évolution mais, la structure interne des systèmes.

Dans un système strictement additif, il y a un symbole pour chaque multiple de la base et la quantité est représentée par la répétition de ces symboles. C'est le cas pour le système hiéroglyphique égyptien et pour le système romain.

NUMÉRATION HIÉROGLYPHIQUE
Valeur des symboles



L'unité est représentée par le bâton.
La dizaine par l'anse de panier.
La centaine par le rouleau de papyrus.
Le millier par la fleur de lotus.
Dix mille par le doigt désignant les étoiles.
Cent mille par le têtard, dû au grand nombre de grenouilles sur les bords du Nil.
Le million par un dieu agenouillé soutenant le monde entier.

(Numération04)

Les systèmes semi-positionnels comportent peu de symboles et la quantité représentée dépend à la fois de la position des symboles et du nombre de fois qu'ils sont répétés. C'est le cas du système babylonien en écriture cunéiforme et du système maya.

Le système babylonien comportait seulement deux symboles, un pour l'unité et l'autre pour un regroupement de dix unités. La position des ces symboles dans l'écriture du nombre indiquait s'il s'agissait d'unités ou de multiples de la base. Dans ce système, il n'y avait pas de symbole pour le zéro, ce qui pouvait créer de la confusion.

(Numération02)

Numération cunéiforme

Le clou représente l'unité
Le chevron représente dix unités

Numération maya

Le coquillage représente le 0
Le point représente l'unité
La barre représente cinq unités

Le système maya était également un système semi-positionnel. Il comportait cependant trois symboles, le point pour l'unité, la barre pour un regroupement de cinq unités et un symbole pour représenter le zéro. Selon certains auteurs, ce symbole est un œil fermé et pour d'autres, c'est un coquillage.

(Numération03)

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

4.4 Exercices

1. Le coût de production d'un article comporte des frais fixes mensuels de 189 $ et des frais variables de 0,75 $ l'unité. L'article se vend 1,80 $.
   a) Décrire mathématiquement la fonction coût de production mensuel et la fonction revenu mensuel. Représenter graphiquement.
   b) Décrire mathématiquement la fonction profit. Représenter graphiquement et interpréter.
   c) Calculer le seuil de rentabilité. Indiquer la signification graphique de ce seuil dans les graphiques des parties a) et b).
   d) Décrire mathématiquement la fonction donnant le coût unitaire pour fabriquer q articles. Représenter graphiquement.
   e) Calculer le coût unitaire associé au seuil de rentabilité.

2. Un produit nécessite des frais fixes mensuels de 540 $ et des frais variables de 2,30 $.
   a) Décrire mathématiquement le coût de production en fonction du nombre d'unités produites.
   b) Décrire mathématiquement le coût unitaire en fonction du nombre d'unités produites mensuellement.
   c) La compagnie qui fabrique ce produit souhaite atteindre le seuil de rentabilité en vendant 200 exemplaires. Quel prix de vente suggérez-vous ?

3. Le coût de production d'un article comporte des frais fixes quotidiens de 850 $ et des frais variables de 3,55 $ l'unité. L'article se vend 24,80 $.
   a) Décrire mathématiquement la fonction coût de production quotidien et la fonction revenu quotidien. Représenter graphiquement.
   b) Décrire mathématiquement la fonction profit quotidien. Représenter graphiquement.
   c) Calculer le seuil de rentabilité. Indiquer la signification graphique de ce seuil dans les graphiques des parties a) et b).
   d) Décrire mathématiquement la fonction donnant le coût unitaire pour fabriquer n articles. Représenter graphiquement.
   e) Calculer le coût unitaire associé au seuil de rentabilité.
   f) Calculer le profit marginal.

4. Un artiste grave des plaques de bois qui servent de négatif pour imprimer sur papier. Chaque plaque lui permet de graver seulement 200 exemplaires sur papier. Il réclame votre aide pour l'aider à mieux gérer son entreprise. Il a estimé que chaque impression (papier, encre et temps de préparation) représente des frais variables de 25 $ et que la gravure de la plaque (matériel, conception et temps de gravure), lui revient à 3 600 $ de frais fixes.
   a) Décrire mathématiquement son coût de production en fonction du nombre d'exemplaires produits.
   b) Il aimerait que son seuil de rentabilité soit atteint lorsqu'il aura vendu le soixante-quinzième exemplaire. Quel prix suggérez-vous de fixer ?
   c) Quel profit réalisera-t-il s'il réussit à vendre les 200 exemplaires d'une gravure à ce prix.

5. La compagnie pour laquelle vous travaillez veut connaître votre avis sur la rentabilité d'un projet. On envisage de produire un nouvel article pour lequel les frais fixes mensuels sont de 12 000 $ et les frais variables sont de 400 $ l'unité. Une étude de marché indique qu'on ne peut espérer vendre plus de 100 unités par mois de ce produit en fixant le prix à 600 $. Le conseil d'administration veut savoir si cette production peut s'avérer rentable dans ces conditions. Quelles sont vos recommandations ?

6. Une compagnie qui fabrique des meubles moulés à armature de métal envisage d'ajouter un nouveau modèle de chaise à sa production. La fabrication de ces chaises implique des frais fixes mensuels

de 2 400 $ et des frais variables de 12,50 $. On prévoit vendre les chaises 19,50 $ l'unité.

a) Décrire mathématiquement la fonction coût de production mensuel et la fonction revenu mensuel. Représenter graphiquement.
b) Décrire mathématiquement la fonction profit. Représenter graphiquement et interpréter.
c) Calculer le seuil de rentabilité. Indiquer la signification graphique de ce seuil dans les graphiques des parties a) et b).
d) Décrire mathématiquement la fonction donnant le coût unitaire pour fabriquer q chaises. Représenter graphiquement.
e) Calculer le coût unitaire associé au seuil de rentabilité.

7. Vous avez l'opportunité de vous porter acquéreur d'un comptoir de type bar à salade qui sert les repas du midi près d'un cégep. Les clients se servent eux-mêmes au bar à salade et peuvent consommer à volonté pour un coût de 5,50 $. L'expérience démontre que le coût unitaire des denrées consommées est de 3,25 $ par personne. De plus, l'entreprise doit, à chaque jour d'opération, assumer des frais fixes de 106 $.

a) Décrire mathématiquement la fonction coût de production et la fonction revenu. Représenter graphiquement.
b) Décrire mathématiquement la fonction profit. Représenter graphiquement.
c) Calculer le seuil de rentabilité. Indiquer la signification graphique de ce seuil dans les graphiques des parties a) et b).
d) Décrire mathématiquement la fonction donnant le coût unitaire pour fabriquer q repas. Représenter graphiquement.
e) Calculer le coût unitaire associé au seuil de rentabilité.
f) Calculer le profit marginal.
g) Si l'entreprise vend en moyenne 260 repas par jour, quel est le profit journalier moyen ?

8 Vous gérez un bar à crème glacée molle dans un centre d'achats. Vous devez assumer des frais fixes de 95 $ par jour (location de l'emplacement, appareillage, électricité). Vous devez également assumer des frais variables de 30 ¢ du cornet dont le prix de vente unitaire est de 90 ¢.

a) Décrire mathématiquement la fonction coût de production et la fonction revenu. Représenter graphiquement.
b) Décrire mathématiquement la fonction profit. Représenter graphiquement.
c) Calculer le seuil de rentabilité. Indiquer la signification graphique de ce seuil dans les graphiques des parties a) et b).
d) Décrire mathématiquement la fonction donnant le coût unitaire pour préparer q cornets. Représenter graphiquement.
e) Calculer le coût unitaire associé au seuil de rentabilité.
f) Calculer le profit marginal.
g) Si l'entreprise vend en moyenne 352 cornets par jour, quel est le profit journalier moyen ?

9. Une entreprise fabrique et vend annuellement 3 000 unités d'un produit. Ses frais fixes annuels sont de 6 000 $ et le coût variable est de 10 $ par unité. Le prix de vente est de 15 $. L'entreprise cherche à abaisser le seuil de rentabilité. Diverses hypothèses sont envisagées:

- augmentation du prix de vente à 16,50 $;
- utilisation de matériaux de moindre qualité ramenant le coût variable à 8 $ l'unité;
- acquisition d'un nouvel appareil qui réduirait les frais fixes à 5 000 $ annuellement.

Analyser et discuter chacune de ces options. Donner le taux de réduction du seuil de rentabilité que chacune des options peut entraîner et le changement d'attitude possible des consommateurs.

10. Un manufacturier vous informe que s'il ne vend que 30 exemplaires d'un produit, il subira une perte de 2 400 $, mais s'il en vend 180, il fera un profit de 1 200 $. Le prix de vente de ce produit est de 60 $.
    a) En supposant que son profit est modélisable par une fonction affine, déterminer ses frais fixes et ses frais variables et donner les fonctions de coût, de revenu et de profit.
    b) Déterminer son seuil de rentabilité.

11. Une entreprise fabrique et vend annuellement 4 000 unités d'un produit. Ses frais fixes annuels sont de 8 000 $ alors que le coût variable pour chaque unité est de 11 $. Le prix de vente est actuellement de 19 $. Le conseil d'administration cherche des moyens pour diminuer de 30 % le seuil de rentabilité. Identifier les options possibles et les modifications qu'il faudrait apporter pour atteindre l'objectif. Analyser les conséquences possibles de chaque modification.

    Une étude de marché a permis de constater qu'une augmentation de 1 $ du prix de vente n'entraînerait pas de baisse du volume de vente annuel mais que toute augmentation supérieure à 1 $ aurait des conséquences, plusieurs des personnes interrogées ayant déclaré qu'ils opteraient alors pour le produit concurrent. Vérifier si une augmentation de 1 $ du prix de vente serait suffisante pour permettre d'atteindre l'objectif visé par le Conseil d'administration.

    Le conseil décide d'augmenter de 1 $ le prix de vente de l'article et vous demande quelles sont, dans ces conditions, les autres options possibles pour atteindre l'objectif de réduction de 30 % du seuil de rentabilité. Quelles sont vos recommandations?