MODÈLE QUADRATIQUE *en* GESTION

CHAPITRE 5

Résoudre des problèmes de gestion à l'aide d'un modèle quadratique.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la description d'un problème de gestion à l'aide d'un modèle quadratique;
- la détermination des seuils de rentabilité pour un produit dont la demande est fonction affine du prix;
- l'analyse de rentabilité d'un produit dont la demande est fonction affine du prix;
- la détermination des conditions d'équilibre du marché, prix et quantité à produire, lorsque l'offre et la demande ne sont pas des fonctions affines;
- la détermination des conditions optimales d'un problème modélisable par une fonction quadratique.

OBJECTIFS

5.1 Résoudre des problèmes du domaine de la gestion nécessitant l'utilisation de modèles quadratiques.

5.2 Déterminer les seuils de rentabilité d'un produit lorsque la demande est fonction affine du prix.

5.3 Déterminer les conditions d'équilibre d'un marché lorsque l'offre et la demande sont des fonctions quelconques.

5.4 Déterminer la solution optimale d'un problème modélisable par une équation quadratique.

5.1 Modélisation quadratique

Nous étudierons diverses applications des fonctions quadratiques relevant du domaine de la gestion. Dans ces applications, nous ferons l'analyse de la rentabilité d'un produit en considérant l'impact d'une variation du prix de vente sur l'intérêt des consommateurs, sur le revenu et le profit de la compagnie.

Revenu maximal et profit maximal

EXEMPLE 5.1.1

ModQuadra01

Un industriel met sur le marché des gommes à effacer que les enfants collectionnent. Chaque nouveau modèle nécessite la fabrication d'une matrice au coût de 2 100 $ et les coûts variables sont de 0,40 $ l'unité. La demande pour ce genre de gommes à collectionner dépend du prix de vente. On a constaté que l'on vend 6 000 exemplaires lorsque le coût est de 1 $ et 13 500 exemplaires lorsque le coût est de 0,75 $.

a) Utiliser un modèle affine pour décrire la relation entre le prix de vente et le nombre de gommes à effacer vendues. Représenter la relation graphiquement et l'interpréter.

b) Décrire le lien entre le nombre de gommes produites et le coût de fabrication.

c) Puisqu'on veut éviter l'accumulation de surplus, on souhaite produire exactement la quantité que l'on peut vendre, compte tenu du prix de vente. Décrire le coût de production en fonction du prix de vente. Représenter la relation graphiquement et l'interpréter.

d) Décrire le revenu en fonction du prix de vente.

e) Décrire le profit en fonction du prix de vente.

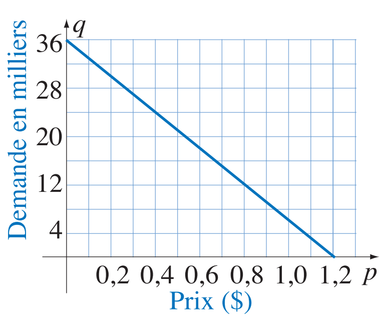
Solution

a) Notons p, le prix de vente qui est la variable indépendante et q, le nombre de gommes vendues, qui est la variable dépendante. Trouver un modèle affine signifie trouver l'équation d'une droite. Dans ce cas, on connaît deux points de la droite, soit (1; 6 000) et (0,75; 13 500). On cherche donc l'équation de la droite passant par ces deux points,

$$\frac{q - 6\,000}{p - 1} = \frac{13\,500 - 6\,000}{0{,}75 - 1} = -30\,000,$$

d'où $\quad q - 6\,000 = -30\,000(p - 1)$

et $\quad q = -30\,000p + 36\,000.$



Graphiquement, on a une droite de pente négative. Cette droite illustre le fait qu'en augmentant le prix on diminue l'intérêt des consommateurs. Théoriquement, à 1,20 $ les consommateurs trouvent l'article trop cher et ils ne l'achètent plus.

b) Notons C, le coût de production. Puisqu'il y a 2 100 $ de frais fixes et 0,40 $ de frais variables, le coût est décrit par :

$$C(q) = 0{,}40q + 2\,100.$$

c) En substituant $q = -30\,000p + 36\,000$ dans la fonction C, on détermine le coût de production en fonction du prix de vente, ce qui donne :

$$\begin{aligned} C(p) &= 0{,}40(-30\,000p + 36\,000) + 2\,100 \\ &= -12\,000p + 16\,500. \end{aligned}$$

d) Le revenu R est le produit du nombre d'articles vendus par le prix de vente,

$$R = qp.$$

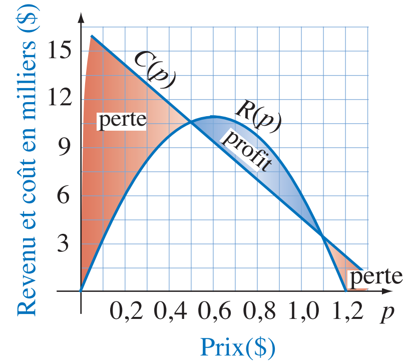
Cependant, $q = -30\,000p + 36\,000$. En substituant, on obtient :

$$R = (-30\,000p + 36\,000)p,$$

d'où $R(p) = -30\,000p^2 + 36\,000p$.

e) Le profit est donné par le revenu moins le coût de production. On a donc :

$$\begin{aligned} P(p) &= R(p) - C(p) \\ &= -30\,000p^2 + 36\,000p - (-12\,000p + 16\,500) \\ &= -30\,000p^2 + 36\,000p + 12\,000p - 16\,500 \\ &= -30\,000p^2 + 48\,000p - 16\,500. \end{aligned}$$



Dans cette situation, la variable indépendante, soit le prix, apparaît au second degré dans la fonction revenu et dans la fonction profit. Ce sont donc des fonctions quadratiques. Pour poursuivre l'analyse de la situation, il nous faudrait calculer les prix des seuils de rentabilité. Ils sont représentés graphiquement par l'abscisse des points d'intersection des fonctions coût et revenu, mais également par les zéros de la fonction profit. Il faudrait calculer le prix pour lequel le revenu est maximal, soit l'abscisse du point sommet de la parabole représentant la variation du revenu en fonction du prix et il faudrait calculer le prix qui va engendrer le profit maximal. Nous allons donc rappeler quelques notions sur les fonctions quadratiques afin de compléter notre analyse.

REMARQUE

Les fonctions revenu et profit peuvent se décrire en fonction du nombre d'unités du produit ou en fonction du prix. Le prix donnant le revenu maximum n'est pas le même que le prix donnant le profit maximum. Le revenu et le profit sont deux fonctions quadratiques qui n'ont pas le même sommet.

Fonction quadratique

Une fonction quadratique est une fonction de la forme suivante:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a \neq 0.$$

La représentation graphique d'une fonction quadratique est une parabole. Elle est concave vers le haut lorsque le coefficient a est positif et elle est concave vers le bas lorsque le coefficient a est négatif. L'équation de son axe de symétrie est $x = -b/2a$. L'abscisse de son point sommet étant $-b/2a$, on trouve l'ordonnée de ce point en calculant l'image par la fonction $f(-b/2a)$. Les zéros d'une fonction quadratique sont donnés par

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si l'expression sous le radical est plus grande que zéro, on peut extraire la racine et on a deux zéros distincts. Si cette expression est égale à zéro, on a une racine double, ce qui signifie que l'expression quadratique est le carré d'un binôme. Si cette expression est plus petite que zéro, on ne peut extraire la racine et il n'y a pas de zéro dans l'ensemble des nombres réels. Ces quelques rappels vont nous permettre de compléter notre étude.

Analyse de la modélisation

La fonction revenu de l'exemple précédent, exprimée en fonction du prix de vente, est :

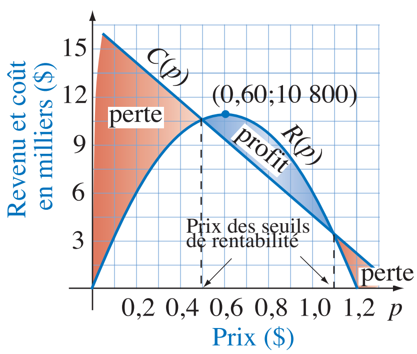
$$R(p) = -30\,000p^2 + 36\,000p.$$

C'est une fonction quadratique pour laquelle $a = -30\,000$, $b = 36\,000$ et $c = 0$. L'abscisse du point sommet de cette parabole est :

$$p = -b/2a = -36\,000/(-60\,000) = 0{,}6,$$

cela signifie que le revenu atteint sa valeur maximale lorsque le prix est de 0,60 $. Le revenu est alors

$$R(0{,}60) = -30\,000 \times (0{,}60)^2 + 36\,000 \times 0{,}60 = 10\,800 \text{ \$}.$$



Les **prix associés aux seuils de rentabilité** sont les valeurs de p pour lesquelles le revenu est égal au coût. Ce sont donc les valeurs de p pour lesquelles on a :

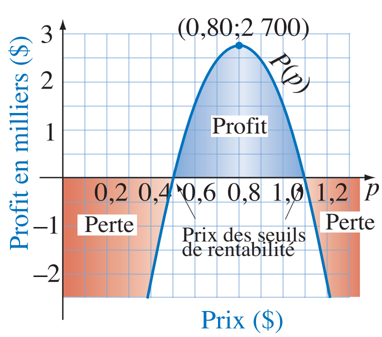
$$R(p) = C(p)$$

d'où $\quad -30\,000p^2 + 36\,000p = -12\,000p + 16\,500$

et $\quad -30\,000p^2 + 48\,000p - 16\,500 = 0$

Résoudre cette équation équivaut à chercher les zéros de la fonction profit

$$P(p) = -30\,000p^2 + 48\,000p - 16\,500, \text{ d'où } p_1 = 0{,}50 \text{ et } p_2 = 1{,}10.$$



Les prix associés aux seuils de rentabilité sont 0,50 $ et 1,10 $. Si le prix est plus bas que 0,50 $, l'industriel vendra beaucoup d'effaces mais ne réussira pas à couvrir ses frais. Le coût de production est toujours plus élevé que le revenu. Par ailleurs, si le prix est plus élevé que 1,10 $ il y a trop peu de consommateurs intéressés et le coût de production est plus élevé que le revenu. Pour que l'industriel fasse un profit, il doit fixer un prix entre 0,50 $ et 1,10 $. Il est tentant de choisir 0,60 $ puisque c'est le prix pour lequel le revenu sera maximal. Cependant, il s'agit d'un revenu brut et il faudrait voir si le prix à fixer pour que le profit atteigne sa valeur maximale est également de 0,60 $. La fonction profit est :

$$P(p) = -30\,000p^2 + 48\,000p - 16\,500.$$

L'abscisse du point sommet est

$$p = -48\,000/(-60\,000) = 0{,}8.$$

Par conséquent, le profit atteindra sa valeur maximale si on fixe le prix à 0,80 $. Cette valeur maximale est

$$P(0{,}80) = 2\,700 \text{ \$}.$$

L'industriel peut donc réaliser un profit de 2 700 $ pour chaque modèle de gommes à effacer s'il fixe le prix à 0,80 $ l'unité.

EXEMPLE 5.1.2

Le propriétaire d'une salle de spectacles de 900 places attire en moyenne 720 spectateurs en vendant ses billets 50 $ et 400 spectateurs en les vendant 70$. Déterminer le prix du billet qui lui donnera le revenu maximal (on suppose un lien affine entre le prix du billet et le nombre de spectateurs).

ModQuadra02

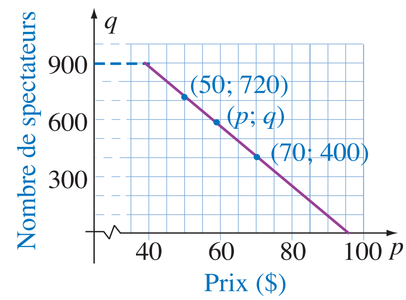
Solution

Le nombre de spectateurs dépend du prix du billet et, en posant p le prix du billet et q le nombre de spectateurs, on a alors les couples

$$(p_1; q_1) = (50; 720) \text{ et } (p_2; q_2) = (70; 400).$$

La correspondance entre le prix du billet et le nombre de spectateurs étant affine, on désire trouver l'équation de la droite passant par ces deux points. En appliquant la procédure du rapport des variations, on obtient :

$$\frac{q-720}{p-50} = \frac{400-720}{70-50} = -16$$



d'où $q - 720 = -16(p - 50)$ et $q = -16p + 1\,520$.

Puisque la salle contient 900 places, elle sera pleine lorsque :

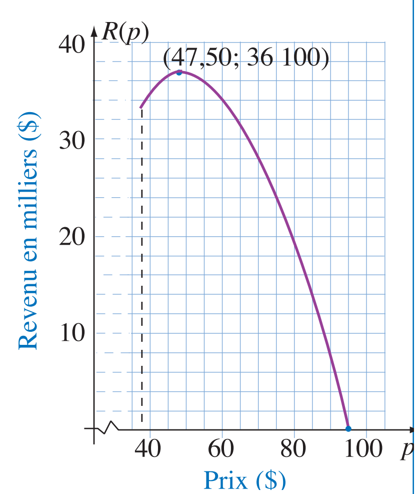
$$q = -16p + 1\,520 = 900.$$

ce qui donne 38,75 $. Il n'est pas avantageux de fixer un prix plus bas. Le modèle est donc valide dans l'intervalle [38,75; 95,00] puisque la salle demeure vide si le prix est de 95 $ ou plus.

Le revenu du propriétaire de la salle est le produit du nombre de spectateurs par le coût du billet, soit : $R = qp$.

Puisque $q = -16p + 1\,520$, on peut exprimer le revenu en fonction du coût du billet, ce qui donne :

$$R(p) = (-16p + 1\,520\,)p = -16p^2 + 1\,520p.$$



Le modèle du revenu est valide dans l'intervalle [38,75; 95,00]. Le revenu est maximal lorsque le prix est égal à $-b/2a$, soit :

$$p = -\frac{b}{2a} = \frac{-1\,520}{-32} = 47{,}50.$$

Le nombre de spectateurs est :

$$q = -16 \times 47{,}50 + 1\,520 = 760 \text{ spectateurs.}$$

Le revenu est alors $R(47{,}50) = 36\,100$ $.

EXEMPLE 5.1.3

Un musée offre des prix spéciaux pour les groupes d'étudiants. Ces prix sont fonction du nombre d'étudiants dans le groupe. Pour un groupe de 20 étudiants ou moins, le coût individuel est de 18 $. S'il y a plus de 20 étudiants dans le groupe, le musée réduit le coût individuel de 0,50 $ multiplié par le nombre de personnes s'ajoutant au groupe minimal de 20. Cette politique s'applique jusqu'à un maximum de 40 étudiants, car les guides n'acceptent pas plus de 40 personnes dans un groupe. Vous

REMARQUE
Les frais pour la sécurité et l'entretien des lieux dépendent du nombre de spectateurs.

devez analyser le revenu réalisé par le musée lors de la visite d'un groupe en tenant compte de la taille de ce groupe.

a) Identifier la variable indépendante et la variable dépendante.

b) Décrire le prix du billet en fonction du nombre d'étudiants dans le groupe. Représenter graphiquement la relation et l'interpréter.

c) Trouver un modèle mathématique décrivant le revenu du musée en fonction du nombre d'étudiants dans le groupe. Représenter graphiquement la relation et l'interpréter.

d) Calculer le nombre d'étudiants pour lequel le revenu du musée sera maximal.

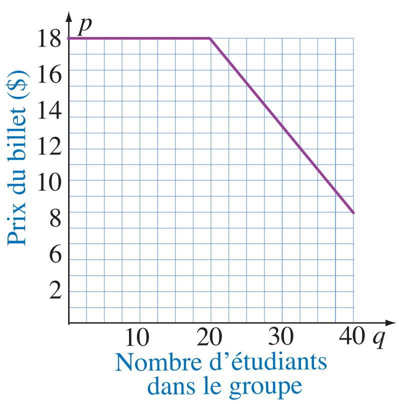
ModQuadra03

REMARQUE

La variable indépendante n'est pas toujours le prix. Lorsqu'il est possible d'obtenir un rabais sur le prix d'un voyage en groupe et que le rabais dépend du nombre de personnes dans le groupe, c'est ce nombre de personnes qui est la variable indépendante.

Solution

a) La variable indépendante est le nombre d'étudiants dans le groupe et les variables dépendantes sont le prix individuel et le revenu.



b) Le prix du billet dépend du nombre d'étudiants dans le groupe. Si le groupe compte 20 étudiants ou moins, le prix est constant à 18 $ par personne. Cependant, si le groupe compte entre 20 et 40 personnes, le prix diminue en fonction du nombre de personnes. Cette diminution est de $(q - 20)$ fois 0,50 $. Le prix du billet est :

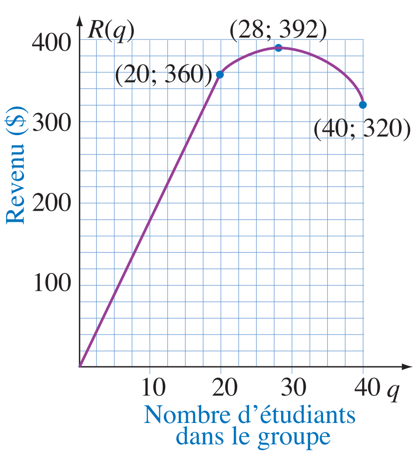
$$p = 18 - 0{,}50(q - 20) = 18 - 0{,}50q + 10 = 28 - 0{,}50q,$$

on a alors $p = 28 - 0{,}50q$.

Dans ce modèle, l'ordonnée à l'origine, 28, représente l'intersection du prolongement du segment de droite avec l'axe vertical. Cependant, le domaine de validité du modèle représenté graphiquement par ce segment n'est valide que dans l'intervalle [20; 40]. Globalement, la description mathématique de cette situation est la fonction par parties :

$$p = \begin{cases} 18 & \text{si } q \leq 20 \\ 28 - 0{,}50q & \text{si } 20 < q \leq 40 \end{cases}$$

dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



c) Le revenu est donné par le prix du billet multiplié par le nombre d'étudiants dans le groupe, soit $R = qp$. Le revenu est :

$$R(q) = \begin{cases} 18q & \text{si } q \leq 20 \\ 28q - 0{,}5q^2 & \text{si } 20 < q \leq 40 \end{cases}$$

d) Le revenu est maximal lorsque

$$q = -b/2a = -28/-1 = 28 \text{ étudiants.}$$

Le revenu est alors de 392 $.

Analyse de rentabilité

PROCÉDURE

Analyse de rentabilité (lien affine entre le volume des ventes et le prix)

1. Établir le lien entre le prix de vente p et le nombre q d'articles que l'on peut espérer vendre (lien affine).
2. Établir la fonction revenu (produit du nombre d'articles vendus et du prix de vente, $R = qp$).
3. Exprimer la fonction revenu en fonction d'une seule variable, le prix de vente $R(p)$ et déterminer le prix maximisant le revenu.
4. Décrire le coût de production en fonction du nombre d'articles produits, $C(q)$ (lien affine).
5. Exprimer le coût de production en fonction du prix de l'article, $C(p)$ (dans l'hypothèse où on ne produira que ce que l'on peut espérer vendre).
6. Établir la fonction profit en fonction du prix de vente, $P(p) = R(p) - C(p)$ et déterminer le prix maximisant le profit.
7. Établir les coûts associés aux seuils de rentabilité (zéros de la fonction profit) et le nombre d'articles des seuils de rentabilité.
8. Tirer les conclusions de l'analyse.

REMARQUE
Dans la pratique, la description mathématique du lien entre le prix et le nombre de clients potentiels est souvent donnée par une droite de régression à partir de données provenant d'une étude de marché.

Le revenu et le profit ne sont pas toujours exprimés en fonction du prix. Ils peuvent être exprimés en fonction du nombre d'articles vendus. Lorsque c'est le cas, les zéros de la fonction profit donnent directement le nombre d'articles aux seuils de rentabilité.

EXEMPLE 5.1.4

ModQuadra04

Une chocolatière cherche à accroître son profit hebdomadaire. Elle a récemment augmenté le prix de ses boîtes de chocolat à 30 $ et constaté qu'elle ne vend plus que 480 boîtes par semaine alors qu'avant elle en écoulait 528 au coût de 28 $. Ses frais d'opération hebdomadaires sont de 2 000 $ plus 8 $ par boîte pour les ingrédients et la main-d'œuvre.

a) Décrire le revenu en fonction du nombre de boîtes vendues et déterminer combien il faut vendre de boîtes pour maximiser le revenu.
b) Représenter graphiquement le revenu et le coût de fabrication en fonction du nombre de boîtes.
c) Décrire le profit en fonction du nombre de boîtes vendues et déterminer combien il faut vendre de boîtes pour maximiser le profit.

Solution

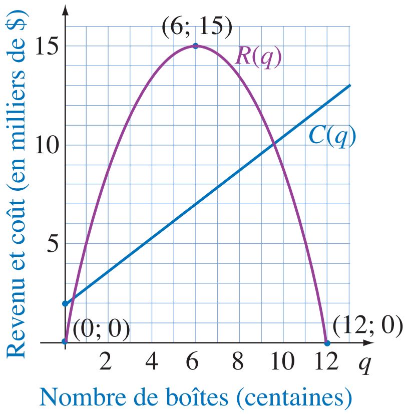
a) Notons p, le prix de vente et q, le nombre de boîtes. En appliquant la procédure des rapports de variation, on obtient :

$$q = -24p + 1\,200$$

Le revenu est le produit du nombre de boîtes vendues par le prix,

$$R = qp.$$

Pour exprimer le revenu en fonction du nombre de boîtes, on doit isoler p dans la relation entre le nombre de boîtes et le prix,



REMARQUE

Il est très important de tirer les conclusions de l'analyse, car c'est le but de l'exercice. C'est en tirant les conclusions que l'on démontre sa compétence. Pour tirer les conclusions, il faut se poser des questions comme: « Doit-on produire cet article? Est-ce rentable? À quelles conditions doit-on produire? ». L'analyse de la rentabilité est un exercice qui devrait faire l'objet d'un rapport pour le Conseil d'administration de l'entreprise. Il est donc important de faire un travail soigné.

$$p = \frac{-q}{24} + 50$$

Le revenu en fonction du nombre de boîtes est

$$R = qp = q\left(\frac{-q}{24} + 50\right) = \frac{-q^2}{24} + 50q$$

Le revenu atteint sa valeur maximale à

$$q = \frac{-50}{2(-1/24)} = 600\ .$$

Pour écouler 600 boîtes, la chocolatière doit les vendre 25 $ l'unité pour un revenu hebdomadaire de 15 000 $.

b) Le coût de fabrication en fonction du nombre de boîtes produites est

$$C(q) = 8q + 2\ 000.$$

c) Le profit en fonction du nombre de boîtes est

$$P(q) = \frac{-q^2}{24} + 50q - (8q + 2\ 000)$$

En regroupant et mettant au même dénominateur, on a alors :

$$P(q) = \frac{-q^2}{24} + 42q - 2\ 000 = \frac{-q^2 + 1\ 008q - 48\ 000}{24}$$

Le profit atteint sa valeur maximum à

$$q = \frac{-1\ 008}{2\times -1} = 504.$$

Pour écouler 504 boîtes, la chocolatière doit les vendre 29 $ l'unité pour un profit hebdomadaire de 8 584 $.

Retour sur l'apprentissage

Lorsque la relation entre le prix de vente d'un article et le volume des ventes est décrite par un modèle affine, le revenu et le profit sont décrits par des modèles quadratiques dont la représentation graphique est une parabole concave vers le bas. On détermine le prix à fixer pour obtenir le revenu maximum et le profit maximum en calculant l'abscisse du point sommet.

Le revenu et le profit ne sont pas toujours exprimés en fonction du prix. Ils peuvent être exprimés en fonction du nombre d'articles vendus. Lorsque c'est le cas, les zéros de la fonction profit donnent directement le nombre d'articles représentant les seuils de rentabilité. Il est ensuite aisé de calculer le prix à l'aide de la fonction demande.

5.2 Exercices

1. Le propriétaire d'une salle de cinéma de 900 places constate que, lorsque le coût du billet est de 9,75 $, il attire 300 spectateurs et que, pour chaque diminution de 1 $, il attire 100 spectateurs de plus. Il désire savoir quel prix il doit demander pour que son revenu soit maximal et il réclame votre aide.

2. Votre entreprise fabrique un produit dont la fonction profit est $P(p) = -6p^2 + 372p - 3\,600$ où p est le prix en dollars.
   a) Quel est le prix le plus bas que l'on peut fixer pour que cette production soit rentable?
   b) Quel est le prix le plus haut que l'on peut fixer tout en demeurant rentable?
   c) Quel est le prix donnant le profit maximal? Quel est ce profit?

3. Votre entreprise fabrique un produit dont la demande en fonction du prix est décrite par :
$$q = 126 - 4{,}5p$$
   où p est le prix en dollars et q est le nombre d'acheteurs. De plus, le coût de production est de 8 $ par article.
   a) Établir la fonction profit.
   b) Déterminer le prix minimal et le prix maximal pour que cette production soit rentable.
   c) Esquisser le graphique des fonctions demande et coût.
   d) Quel est le prix engendrant le profit maximal? Quel est le volume des ventes et le profit?

4. Votre service de la recherche a mis au point un nouveau produit. Avant de procéder à la production massive de ce produit, vous avez fait effectuer une étude de marché et une étude des coûts de production. L'étude de marché a déterminé que la demande pour ce produit était décrite par :
$$q = -1{,}5p + 56,$$
   où p est le prix en dollars et q est le nombre d'acheteurs. L'étude de coût révèle que, pour produire un tel article, les coûts fixes sont de 256 $ et les coûts variables de 8 $ par article.
   a) Vous devez maintenant décider si vous allez produire cet article et à quel prix.
   b) Votre décision serait-elle la même si les coûts fixes étaient de 356 $.

5. Un collège désire produire une effigie pour le carnaval étudiant. Les études préalables ont permis d'établir que la production de ces effigies nécessite des frais fixes de 2 800 $ et des frais variables (matériaux, main-d'oeuvre, énergie) de 0,90 $ par effigie. Une des exigences du collège étant de ne pas faire de déficit, il a fait réaliser une étude de marché. Il ressort de cette étude qu'en vendant ces effigies 3,75 $ on peut espérer en vendre 1 000, alors qu'en fixant le prix à 2,50 $, les ventes potentielles sont de 3 000.
   a) Exprimer la demande en fonction du prix de vente et représenter graphiquement cette fonction.
   b) Exprimer le coût de production en fonction du prix de vente.
   c) Exprimer le revenu en fonction du prix de vente et déterminer le prix que le collège devrait fixer pour maximiser le revenu de cette vente d'effigies.
   d) Représenter sur un même système d'axes la fonction revenu et la fonction coût et déterminer les prix correspondants aux seuils de rentabilité et le nombre d'effigies qui seront alors vendues.
   e) Exprimer le profit en fonction du prix de vente et représenter graphiquement cette fonction.
   f) Déterminer le prix que le collège devrait fixer pour maximiser le profit de cette vente.

6. Votre entreprise vend un produit dont la demande en fonction du prix est décrite par
$$q = 1\,250 - 25p,$$
   où p est le prix en dollars et q est le nombre d'acheteurs. De plus, la production de cet article engendre des coûts de deux types:
   - coûts fixes: entretien de la machinerie, administration, etc. Ces coûts sont de 2 155 $;
   - coûts variables: matières premières, salaires, etc. Ces coûts sont de 8 $ par article.

   a) Établir la fonction revenu. Quel est le prix engendrant le revenu maximal? Quels sont alors le volume des ventes et le revenu?

b) Établir la fonction profit. Quels sont les seuils de rentabilité ? Quel est le prix engendrant le profit maximal ? Quels sont alors le volume des ventes et le profit ?

7. Un industriel met sur le marché de petits objets à collectionner pour les enfants. Chaque nouveau modèle nécessite la fabrication d'une matrice au coût de 4 000 $ et les coûts variables sont de 0,60$ l'unité. La demande pour ce genre d'objets à collectionner dépend du prix fixé. On a constaté que l'on vend 14 000 exemplaires lorsque le coût est de 2,50 $ et 26 000 exemplaires lorsque le coût est de 1,50 $.
   a) Exprimer la demande en fonction du prix de vente et représenter graphiquement cette fonction.
   b) Exprimer le coût de production en fonction du prix de vente.
   c) Exprimer le revenu en fonction du prix de vente et déterminer le prix qu'il faudrait fixer pour maximiser le revenu de cette vente d'objets à collectionner.
   d) Représenter sur un même système d'axes la fonction revenu et la fonction coût et déterminer les prix correspondants aux seuils de rentabilité et le volume des ventes correspondant.
   e) Exprimer le profit en fonction du prix de vente et représenter graphiquement cette fonction.
   f) Déterminer le prix qui engendre le profit maximal.

8. Le propriétaire d'une salle de cinéma de 800 places a déterminé que la relation entre le prix du billet et le nombre de spectateurs était

$$q = -244p + 2\ 436.$$

   a) Déterminer le prix engendrant le revenu maximal. Quel est ce revenu ?
   b) Sachant que le propriétaire doit payer des frais de nettoyage après chaque représentation et que ces frais sont décrits par la règle de correspondance

$$C(q) = 0{,}50q + 50,$$

   où q est le nombre de spectateurs, déterminer la fonction profit et trouver le coût du billet engendrant le profit maximal.

9. Au cours des derniers mois, vous avez augmenté sensiblement le prix de vente d'un des articles que fabrique votre usine. Il s'en est suivi une baisse des ventes qui n'est pas sans vous inquiéter. Le relevé des ventes a permis de déterminer la relation :

$$q = -10p + 737.$$

Mois	Prix ($)	Volume de ventes
Janvier	25	481
Février	30	440
Mars	35	392
Avril	40	338
Mai	45	282

   a) Établir la fonction revenu.
   b) Quel est le prix de vente donnant un revenu maximal? Quel est ce revenu?
   c) Sachant que la production nécessite des coûts fixes de 2 550 $ et des coûts variables de 8 $, établir la fonction profit.
   d) Quel est le prix de vente donnant le profit maximal ? Quels sont alors le profit et le volume des ventes ?
   e) Déterminer les seuils de rentabilité.

10. Le propriétaire d'une salle de spectacle de 900 places a établi que la relation entre le prix de billet et le nombre de spectateurs, est :

$$q = -16p + 1\ 520$$

Il a également déterminé le revenu en fonction du prix du billet, soit :

$$R(p) = -16p^2 + 1\ 520p.$$

Cependant, l'organisation d'un spectacle suppose des frais qui sont évalués à 4 000 $ par événement plus 10 $ par spectateurs pour la sécurité et l'entretien de la salle après le spectacle.
   a) Déterminer la fonction profit en fonction du prix du billet. Représenter graphiquement la fonction.
   b) Déterminer le prix à fixer pour maximiser le profit et calculer le profit réalisé par spectacle en fixant ce prix.

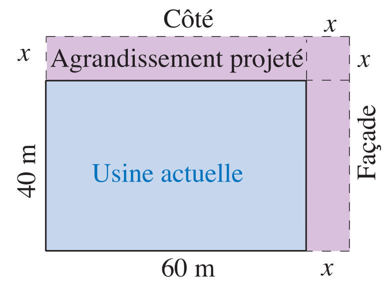
5.3 Modélisation et lois du marché

En gestion, les applications du modèle quadratique ne se limitent pas à l'analyse de rentabilité. On le rencontre dans diverses situations. Dans cette section, nous présentons quelques cas. Nous présentons également une description plus détaillée des lois de l'offre et de la demande ainsi que de la notion d'équilibre du marché.

Modélisation

EXEMPLE 5.3.1

Le propriétaire de l'usine qui vous emploie souhaite agrandir la superficie de son immeuble en construisant des parties de même largeur sur un côté et à l'avant. Cette usine mesure présentement 40 m par 60 m.



a) Vous avez été chargé de décrire l'aire de l'usine en fonction de la largeur x des parties à construire.
b) Trouver l'aire de l'usine si la largeur des parties ajoutées était de 12 m.
c) On vous demande de déterminer la largeur des parties à construire pour que l'agrandissement prévu permette de doubler la superficie de l'usine.

Solution

a) Soit x la largeur des agrandissements sur le côté et à l'arrière. L'aire actuelle est de 2 400 m^2 et celle de la surface ajoutée sera $x^2 + 100x$. L'aire de l'usine en fonction de la largeur des parties à construire sera donc

$$A(x) = x^2 + 100x + 2\,400.$$

b) Si la largeur des parties ajoutées est de 12 m, la superficie après l'agrandissement sera

$$A(12) = (12)^2 + 100 \times 12 + 2\,400 = 3\,744.$$

Soit une superficie de 3 744 m^2.

c) Pour doubler la superficie de l'usine, il faut que l'aire après l'agrandissement soit

$$A(x) = x^2 + 100x + 2\,400 = 4\,800.$$

En regroupant du même côté de l'égalité, on a

$$x^2 + 100x - 2\,400 = 0.$$

En résolvant par décomposition, on a

$$(x - 20)(x + 120) = 0.$$

Pour qu'un produit de nombres réels soit nul, il faut que l'un des facteurs soit nul. C'est la propriété d'intégrité des nombres réels. La procédure pour résoudre consiste donc à égaler chacun des facteurs à 0 et à résoudre les équations linéaires ainsi obtenues, puis à critiquer les résultats de cette procédure.

En posant $x - 20 = 0$, on trouve $x = 20$

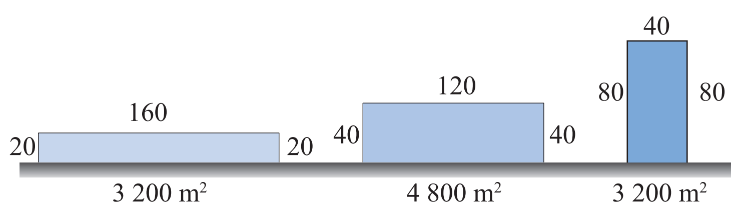
En posant $x + 120 = 0$, on trouve $x = -120$.

On trouve donc deux valeurs pour lesquelles le produit de facteurs sera nul. Ce sont $x_1 = -120$ m et $x_2 = 20$ m; la valeur -120 est à rejeter puisqu'on cherche la largeur de l'agrandissement. L'agrandissement doit donc avoir 20 mètres de largeur pour doubler la superficie de l'usine.

Optimisation

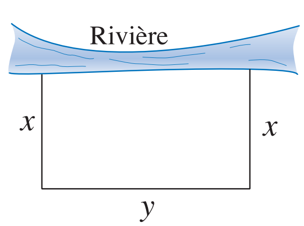
Supposons que l'on veuille enclore en un rectangle une partie de jardin adossée à un mur. Quelles doivent être la largeur et la longueur de ce rectangle pour que l'aire soit la plus grande possible, sachant que l'on dispose de 200 mètres de treillis à clôture ?

Il y a différentes valeurs que l'on peut choisir pour la longueur et la largeur de ce rectangle. Comme l'illustre la figure suivante, si la largeur est de 20 m et la longueur de 160 m, l'aire est de 3 200 m^2. Pour une largeur de 40 m et une longueur de 120 m, l'aire est de 4 800 m^2.



Cependant, si on augmente encore la largeur du terrain, l'aire n'augmentera pas indéfiniment, en effet pour une largeur de 80 m et une longueur de 40 m, l'aire est également de 3 200 m^2. Le problème d'optimisation consiste alors à déterminer les dimensions du terrain pour que l'aire soit la plus grande possible.

EXEMPLE 5.3.2

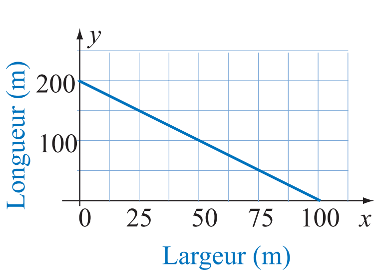


Vous possédez 200 mètres de treillis à clôture et vous désirez clôturer une partie de terrain sur le bord d'une rivière. Ce terrain devant être loué, l'accès à la rivière est un atout. Le terrain ne sera donc clôturé que sur trois côtés. Vous désirez que la superficie soit maximale de façon à vous assurer un meilleur revenu. Trouver les dimensions qu'il faut donner au terrain.

Solution

La longueur totale de la clôture étant de 200 m, la longueur et la superficie de l'enclos dépendent de sa largeur. En posant x pour la largeur de l'enclos, y la longueur et S la superficie, la longueur sera décrite en fonction de la largeur par

$$y + 2x = 200 \text{ ou } y = 200 - 2x.$$



La représentation graphique de la longueur en fonction de la largeur est présentée ci-contre.

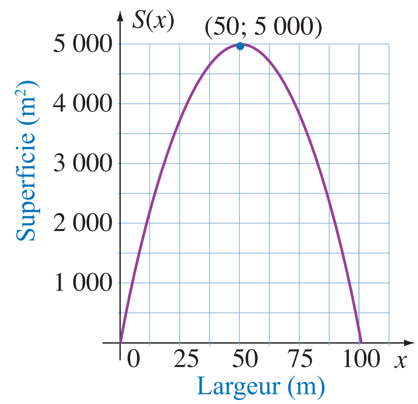
La superficie sera décrite par $S = xy$. Cependant, on a $y = 200 - 2x$. On peut alors exprimer la superficie en fonction de la variable x, ce qui donne

$$S(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2.$$

La superficie est alors décrite par une fonction quadratique dont la variable indépendante est la largeur. La superficie sera maximale pour

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-4} = 50,$$

d'où $x = 50$ m et $y = 100$ m.



PROCÉDURE

Optimisation et modèle quadratique

1. Identifier les variables et les représenter par des lettres.
2. Établir la correspondance affine entre les variables autres que celle à optimiser.
3. Exprimer la variable à optimiser en fonction des autres variables.
4. En utilisant la correspondance affine, effectuer une substitution de façon à exprimer la variable à optimiser en fonction d'une seule variable.
5. Trouver la valeur de la variable indépendante pour laquelle on obtient un maximum. Déterminer la valeur maximale.

Équilibre du marché

ModQuadra05

En économie, on rencontre différentes situations dont la solution implique la recherche du point de rencontre de deux courbes. Une de ces situations est basée sur la **loi de l'offre et de la demande**. Le prix d'équilibre du marché détermine le nombre d'unités que les fabricants sont prêts à offrir. Lorsque le prix augmente, les fabricants sont intéressés à produire plus. Par ailleurs, le prix du marché détermine également le nombre d'unités que les consommateurs sont prêts à acheter. Lorsque le prix augmente, les consommateurs sont moins intéressés à acheter le produit et peuvent opter pour un concurrent.

Demande

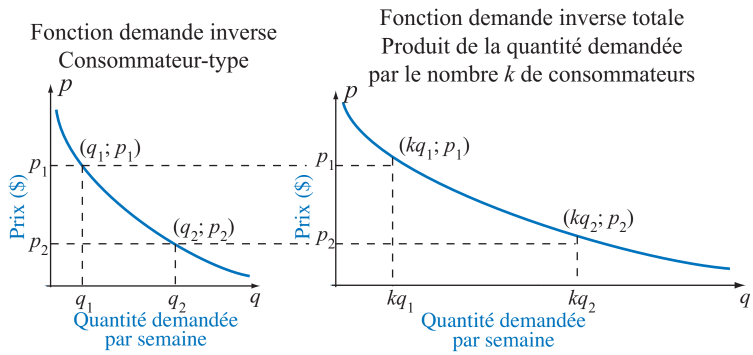
En économie, la **demande** est la relation entre le prix d'un produit et la quantité de ce produit que désirent et peuvent acheter les consommateurs à ce prix pour une période déterminée. En isolant p dans cette relation, on obtient la **demande inverse**.

REMARQUE

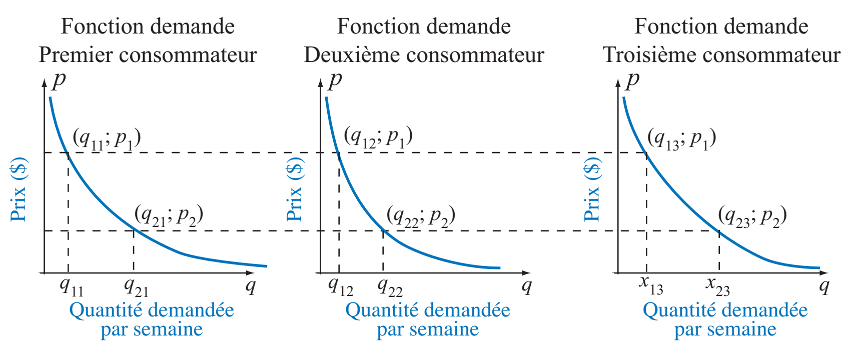
Il n'est pas suffisant de désirer un bien, il faut pouvoir se le procurer. D'autre part, l'indication de la période, jour, semaine ou mois est indispensable dans une fonction demande. Dire qu'à un prix donné, un consommateur achètera une boîte de céréales n'est pas une information utile. Dire qu'à ce prix le consommateur se procurera une boîte de céréales par semaine est un renseignement utile. Si ce consommateur a le même comportement que des milliers d'autres consommateurs, l'information devient très utile pour la prise de décision.

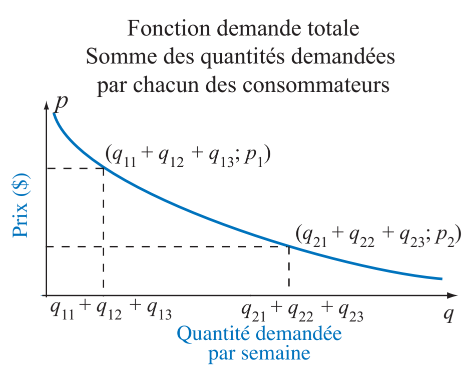
De façon générale, la demande des consommateurs diminue lorsque le prix unitaire augmente et elle augmente lorsque le prix diminue. On le constate facilement lorsqu'un produit est en solde. En économie, on utilise la **demande inverse** lorsqu'on souhaite déterminer le prix qui permettra d'écouler une quantité connue de marchandises.

Pour un producteur, le consommateur est rarement un individu. Par exemple, pour une compagnie qui produit des rouleaux de papiers essuie-tout, le consommateur peut-être une chaîne d'épiceries, une chaîne de pharmacies ou une chaîne de magasins à grande surface. La demande peut être la même pour chacun de ces consommateurs ou elle peut être différente pour chacun d'eux. Si elle est la même, la demande totale est le produit de la demande pour un des consommateurs par le nombre de ceux-ci.



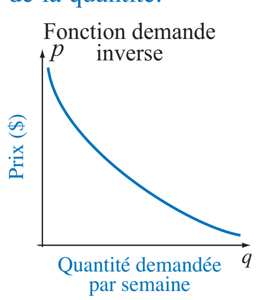
Si la demande diffère d'un consommateur à l'autre, la demande totale est la somme des demandes.





REMARQUE

Par relation inverse, on entend dans cette loi que lorsque la variable indépendante augmente, la variable dépendante diminue et vice-versa. Ne pas confondre avec relation inversement proportionnelle ni avec fonction inverse. Dans la fonction demande, la quantité dépend du prix et dans la fonction demande inverse, le prix dépend de la quantité.



LOI

de la demande

Il existe une **relation inverse** entre le prix d'un produit et la quantité demandée de ce produit.

L'offre

Pour qu'un produit soit disponible, il doit être fabriqué et l'intérêt d'un fabricant à produire cet article est également en relation avec le prix.

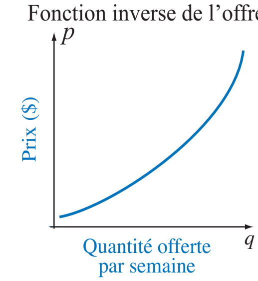
Offre

En économie, l'**offre** est la relation qui existe entre le prix d'un produit et la quantité que désirent en fabriquer les producteurs.

REMARQUE

Par relation directe, on entend que lorsque la variable indépendante augmente, la variable dépendante augmente et vice-versa.

Fonction inverse de l'offre

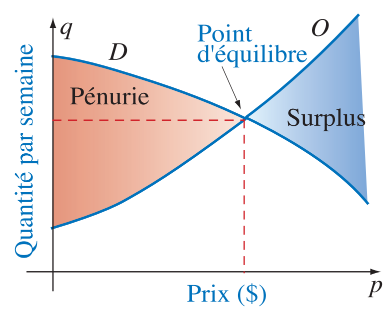


LOI

de l'offre

Il existe une relation directe entre le prix d'un produit et la quantité offerte de ce produit. En isolant p dans cette relation, on obtient l'**offre inverse**.

Le point de rencontre des graphiques des fonctions décrivant l'offre et la demande est appelé le **point d'équilibre** du marché. L'abscisse de ce point est le prix pour lequel l'offre est égale à la demande. Il n'y a alors ni pénurie ni surplus du produit. Dans un marché de libre concurrence, la loi de l'offre et de la demande stipule que le prix de vente tend vers le point d'équilibre.



- lorsque le prix est inférieur au prix d'équilibre, la demande est supérieure à l'offre. Face à cette pénurie, les commerçants sont portés à hausser les prix, ce qui entraîne un accroissement de la production de façon à ce que l'offre rejoigne la demande;
- lorsque le prix est supérieur au prix d'équilibre, les gens étant moins intéressés à acheter, la demande est inférieure à l'offre. Il y a alors surplus de stocks, les commerçants sont portés à baisser les prix pour écouler les surplus. Ce qui entraîne une diminution de la production de façon à ce que l'offre rejoigne la demande.

On peut également déterminer les conditions d'équilibre en considérant les fonctions **demande inverse** et **offre inverse**.

REMARQUE

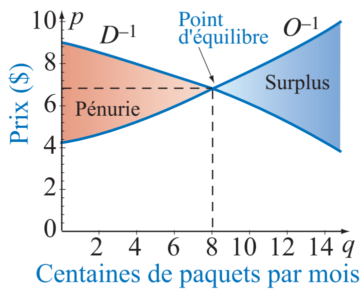
À un prix plus bas que le prix d'équilibre, les consommateurs seraient plus nombreux, mais les fabricants seraient moins intéressés à produire, il y aurait pénurie. À un prix plus élevé, les consommateurs seraient moins intéressés à acheter et les manufacturiers seraient intéressés à produire plus, il y aurait surplus de production.

Prix d'équilibre du marché

Le **prix d'équilibre du marché** est le prix pour lequel l'offre est égale à la demande, c'est-à-dire pour lequel il n'y a ni pénurie ni surplus.

EXEMPLE 5.3.3

ModQuadra06



Lors d'une étude de marché, on a déterminé que l'offre mensuelle inverse pour un paquet de disques compacts vierges est décrite par :

$$p = O^{-1}(q) = 0{,}01q^2 + 0{,}24q + 4{,}20 \text{ \$},$$

où p est le prix en dollars et q est la quantité en centaines d'unités. De plus, la demande mensuelle inverse est décrite par :

$$p = D^{-1}(q) = -0{,}01q^2 - 0{,}2q + 9 \text{ \$}.$$

a) Calculer le prix d'équilibre du marché et le nombre d'unités vendues mensuellement à ce prix.

b) Le producteur dispose actuellement d'un surplus de 800 unités qu'il souhaite écouler au cours des deux prochains mois. Quel prix doit-il fixer pour y parvenir?

Solution

a) Pour déterminer le nombre d'unités vendues mensuellement, on peut procéder par comparaison des ordonnées. Cela donne :

$$0{,}01q^2 + 0{,}24q + 4{,}20 = -0{,}01q^2 - 0{,}2q + 9,$$
$$0{,}02q^2 + 0{,}44q - 4{,}80 = 0.$$

En multipliant par 100, on obtient :

$$2q^2 + 44q - 480 = 0,$$
$$q^2 + 22q - 240 = 0.$$

En factorisant, on a :

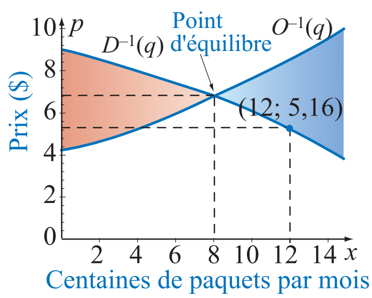
$$(q + 30)\,(q - 8) = 0.$$

On obtient donc $q = -30$ et $q = 8$. La valeur négative est à rejeter et la quantité à l'équilibre est 800 unités.

Le prix à l'équilibre est :

$$p = O^{-1}(8) = 0{,}01 \times 8^2 + 0{,}24 \times 8 + 4{,}20 = 6{,}76 \text{ \$}.$$

On obtient donc que le prix à l'équilibre est de 6,76$ et que le nombre d'unités offertes et vendues mensuellement est alors de 800 unités.



b) Le producteur souhaite écouler 400 unités de plus par mois pour les deux prochains mois. Il souhaite donc écouler 12 centaines d'unités par mois. Il doit donc stimuler la demande en baissant le prix. En posant $q = 12$ dans la fonction demande, on obtient :

$$p = D^{-1}(12) = -0{,}01 \times 12^2 - 0{,}2 \times 12 + 9 = 5{,}16 \text{ \$}.$$

TIC

```
> restart:
  f:=x->0.01*x^2+0.24*x+4.2;
  g:=x->-0.01*x^2-0.2*x+9;
  solve(0.01*x^2+0.28*x+3.2):
  plot({f(x),g(x)},x=0..20,y=0..10);
```

Retour sur l'apprentissage

Les fonctions de l'offre et de la demande sont parfois décrites en considérant la quantité comme variable indépendante et le prix comme variable dépendante. Cela est utile lorsqu'on veut déterminer le prix à fixer pour écouler une certaine quantité du produit. On peut également vouloir fixer le prix pour que les industries augmentent leur production.

L'équilibre du marché est atteint lorsque le bien se vend à un prix pour lequel il n'y a ni pénurie ni surplus. Certains facteurs peuvent être déterminant sur l'offre et la demande : le pouvoir d'achat des consommateurs, les taxes à la consommation, produits de remplacement sans marque, etc.

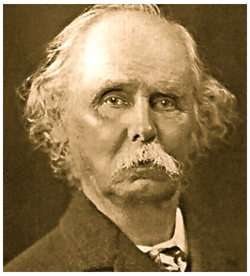
Un peu *d'histoire*

MODÈLES MATHÉMATIQUES EN GESTION

Le mathématicien et économiste français Antoine-Augustin Cournot (1802-1877), dans son ouvrage *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* publié en 1838, étudie les conditions d'équilibre du marché. Cournot a recours aux fonctions mathématiques pour modéliser et étudier les phénomènes économiques. Il étudie plus particulièrement l'équilibre lorsqu'il y a un seul producteur qui s'accapare tout le marché. En plus d'étudier cette situation de monopole, il étudie les conditions d'équilibre lorsque deux producteurs se partagent un même marché, soit une situation de duopole. Les conditions d'équilibre identifiées par Cournot ont par la suite été généralisées par le mathématicien et économiste américain John Forbes Nash Jr[1] (1928-)

Antoine-Augustin Cournot 1802-1877

La loi de la demande selon laquelle la demande pour un produit est fonction du prix auquel on le vend a été établie par Cournot. Selon cette loi, la demande pour un bien diminue lorsque le prix de ce bien augmente. On doit également à Cournot les notions d'élasticité de la demande et de coût marginal (NH Cournot). La demande pour un bien est élastique si une légère augmentation du prix entraîne une baisse importante du revenu. Dans ce cas, il n'est pas avantageux d'augmenter le prix. Le coût marginal est le coût engendré par la production d'une unité supplémentaire d'un bien.



Alfred Marshall 1842-1924

C'est l'économiste britannique Alfred Marshall (1842-1924) qui a introduit en économie la loi de la l'offre. Selon cette loi, l'offre d'un bien dans un marché dépend du prix. Si le prix est bas, les producteurs sont moins enclins à produire ce bien. Si le prix est élevé, les producteurs sont intéressés à en produire plus.

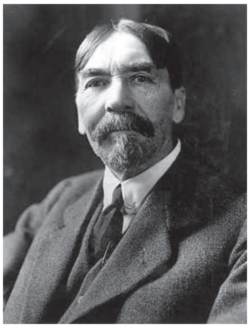
1. Économiste et mathématicien américain né en 1928. Il a travaillé sur la théorie des jeux, la géométrie différentielle, et les équations aux dérivées partielles. Il a partagé le prix Nobel d'économie en 1994 avec Reinhard Selten et John Harsanyi pour leurs travaux en théorie des jeux. Sa vie est racontée dans le film *Un homme d'exception* (2001) (*A Beautiful Mind*) réalisé par Ron Howard et le livre *Un Cerveau d'exception* de Silvia Nasar.

L'équilibre du marché dépend de ces deux lois. Si le prix pour un bien est bas, les producteurs sont enclins à produire moins parce que la production est moins rentable, ce qui cause une pénurie. À cause de cette pénurie, les consommateurs sont prêts à payer plus cher pour se procurer ce bien, la demande augmente, ce qui incite les producteurs à augmenter la production.

Si le prix est élevé, les producteurs sont portés à augmenter la production mais, les consommateurs sont portés à délaisser le produit et opter pour un produit de remplacement, la demande diminue. Si l'offre est supérieure à la demande, il y a un surplus de biens sur le marché et les producteurs sont portés à diminuer le prix pour écouler la production, ce qui a un effet à la hausse sur la demande. Le prix d'équilibre du marché est le prix pour lequel la demande est égale à l'offre. Il n'y a alors ni surplus ni pénurie.

(NH Marshall)

L'économiste américain Thorstein Veblen a décrit un comportement paradoxal par rapport à la loi de la demande. Dans son ouvrage *Theory of the leisure class* il expose le concept de « Conspiciuous consumption » dont la traduction française est « consommation ostentatoire ».



Thorstein Veblen 1857-1929

La consommation ostentatoire est la propension dans les classes de gens fortunés, que Veblen appelle » classe des loisirs[2] », à se procurer des biens dont ils n'ont pas besoin. La consommation n'est pas un reflet des besoins de l'individu mais, de son désir de se démarquer du voisin et de montrer sa supériorité. Les consommateurs de cette classe sont attirés par les biens dispendieux et l'augmentation du prix se traduit par un attrait plus marqué des consommateurs fortunés à cause de l'image de prestige que la propriété de ces biens projette.

(NH Veblen)

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

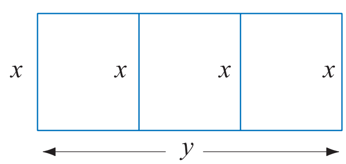
http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

2. Leisure class

5.4 Exercices

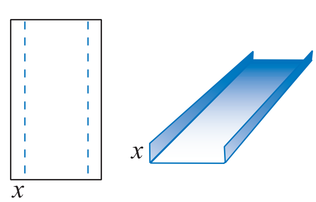
1. Un homme a 12 m de clôture et veut s'en servir pour clôturer une portion de terrain rectangulaire devant servir à faire un jardin de superficie maximale. Déterminer les dimensions du jardin si celui-ci est contigu à la maison de façon à ne clôturer que sur trois côtés.

2. Une compagnie possède 2 400 m de clôture avec lesquels elle désire faire trois portions de terrain de même superficie pour y placer les matériaux qu'elle utilise.



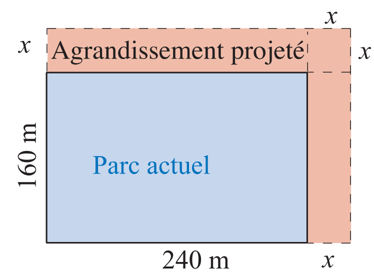
   a) Exprimer la relation entre la longueur et la largeur des enclos.
   b) Exprimer l'aire totale en fonction de la largeur x des enclos.
   c) Trouver les dimensions de chacun des enclos pour que l'aire totale soit maximale.

3. Une compagnie désire fabriquer des gouttières à partir de feuilles d'aluminium de 27 cm de largeur en repliant les deux extrémités perpendiculairement à la base.



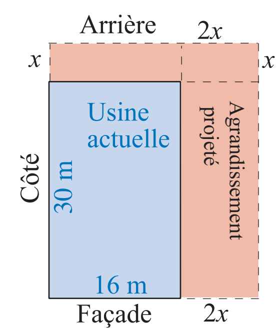
   a) Exprimer la capacité de la gouttière (aire de la coupe transversale) en fonction de la largeur x de la partie repliée.
   b) Quelle largeur doit-on replier pour que la capacité de la gouttière soit maximale?

4. Une municipalité gère un parc de 240 m de long par 160 m de large et désire accroître sa superficie. Cet agrandissement devra se faire en conservant la forme rectangulaire. Pour ce faire, la municipalité envisage d'ajouter des bandes de terrain d'égale largeur sur la longueur et sur la largeur du parc existant.



   a) Vous avez été chargé de décrire l'aire du parc en fonction de la largeur des bandes de terrain qui seront ajoutées.
   b) Trouver l'aire du parc si la largeur des bandes de terrain ajoutées était de 20 m.
   c) On vous demande de déterminer la largeur des bandes de terrain pour que l'agrandissement prévu permette de doubler la superficie du parc.

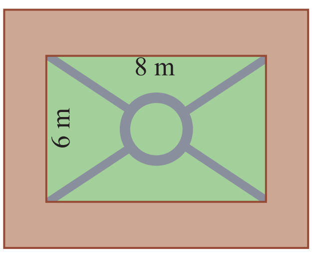
5. Le propriétaire de l'industrie qui vous emploie souhaite augmenter la superficie de son usine en agrandissant à l'arrière et sur un des côtés de l'édifice. Il souhaite que la largeur de l'agrandissement sur le côté de l'édifice soit le double de la largeur de l'agrandissement à l'arrière.



   a) Sachant que les dimensions de l'édifice sont présentement de 16 m en façade par 30 m de côté, décrire l'aire de l'usine en fonction de la largeur de l'agrandissement en façade.
   b) Déterminer l'aire de l'usine si la largeur de l'agrandissement de la façade est de 5 m, de 8 m.
   c) Le propriétaire décide de tripler la superficie de l'usine et vous demande de trouver la largeur des parties à construire pour respecter cette contrainte.

6. On lance un objet perpendiculairement dans les airs. La hauteur de cet objet par rapport au sol est donnée par
$$h(t) = 35t - 4{,}9t^2,$$
où t est le temps en secondes et h la hauteur en mètres.
   a) Trouver la hauteur après 1 s, 2 s, 3 s, 4 s, 5 s.
   b) Combien de temps mettra cet objet pour atteindre sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?

7. La municipalité envisage d'aménager un lot fleuri de forme rectangulaire de 8 m par 6 m au centre d'un parc avec fontaine au centre. L'îlot devra être entouré d'une terrasse en inter blocs où des bancs seront disposés.



   a) Décrire l'aire de la surface de cette terrasse en fonction de sa largeur.
   b) La municipalité dispose d'un surplus de pavés inter blocs pouvant couvrir une superficie de 240 m^2. Déterminer la largeur maximale de l'aménagement en terrasse si la municipalité ne souhaite pas acquérir de nouveaux matériaux.

Exercices récapitulatifs

1. Une entreprise a un coût de production mensuel décrit par $C(n) = 30n + 15\,750$ pour un des articles qu'elle produit dont le prix de vente est de 75 $.
   a) Donner la fonction décrivant le profit mensuel et représenter graphiquement.
   b) À quoi correspond l'abscisse à l'origine de cette fonction ?
   c) Un nouveau procédé de fabrication permettrait de diminuer les frais variables à 25 $ mais augmenterait les frais fixes mensuels à 25 500 $. Déterminer la fonction profit dans ce cas. Comparer le profit mensuel réalisé selon les deux procédés.
   d) Trouver le niveau d'indifférence et interpréter.
   e) Quel conseil donnez-vous à cette entreprise ?

2. Le coût de production d'un article comporte des frais fixes quotidiens de 850 $ et des frais variables de 3,55 $ l'unité. L'article se vend 24,80 $.
   a) Décrire mathématiquement la fonction coût de production quotidien et la fonction revenu quotidien. Représenter graphiquement.
   b) Décrire mathématiquement la fonction profit quotidien. Représenter graphiquement.
   c) Calculer le seuil de rentabilité. Indiquer la signification graphique de ce seuil dans les graphiques des parties *a* et *b*.
   d) Décrire mathématiquement la fonction donnant le coût unitaire pour fabriquer n articles. Représenter graphiquement.
   e) Calculer le coût unitaire associé au seuil de rentabilité.

3. Un fabricant de chaussures, à la suite d'une étude de marché, a reçu les données du tableau suivant.

Prix ($)	Ventes annuelles (milliers de paires)
60	22
65	20
70	18
75	14
80	12

À l'aide de ces données, on a établi la relation entre le prix de vente de ses produits et le nombre de paires vendues annuellement, soit :
$$q = -520p + 53\,600$$
   a) Établir la fonction revenu.
   b) Quel est le prix de vente donnant un revenu maximal ? Quel est ce revenu ?
   c) Sachant que la production annuelle nécessite des coûts fixes de 42 000 $ et des

coûts variables de 32 $ la paire, établir la fonction profit.

d) Quel est le prix de vente donnant le profit maximal ? Quels sont alors le profit et le volume des ventes et les seuils de rentabilité?

4. Votre compagnie désire lancer un nouveau produit sur le marché. Une étude de marché laisse prévoir que l'intérêt des consommateurs dépend du prix que vous allez fixer pour ce produit. Un sondage a permis d'établir que la relation entre le prix et le nombre d'articles vendus mensuellement est :

$$q = -10p + 680.$$

Sachant que le coût de production est donné par :

$$C(q) = 18q + 8\,000.$$

Déterminer le prix engendrant le revenu maximal. Quel est ce revenu? Déterminer le prix engendrant le profit maximal et calculer ce profit.

5. Une étude de marché a permis de déterminer que l'offre mensuelle pour un produit est décrite par :

$$p = O^{-1}(q) = 0{,}01q^2 + 0{,}28q + 3{,}20 \text{ \$}$$

où p est le prix en dollars et q est la quantité en milliers d'unités. De plus, la demande mensuelle est décrite par :

$$p = D^{-1}(q) = -0{,}01q^2 - 0{,}2q + 16 \text{ \$}.$$

a) Trouver le prix d'équilibre du marché et le nombre d'unités vendues mensuellement à ce prix.

b) Le producteur dispose actuellement d'un surplus de 6 000 unités qu'il souhaite écouler au cours des trois prochains mois. Quel prix doit-il fixer pour y parvenir ?

6. Votre compagnie fabrique, entre autres choses, des étuis à crayons. Constatant que les ventes ont baissé au cours des dernières années, vous avez fait réaliser une étude sur la relation entre le volume des ventes et le prix au cours des dernières années. Cette relation est :

$$q = -16\,400p + 60\,000.$$

a) Établir la fonction revenu.

b) Quel est le prix de vente donnant un revenu maximal ? Quel est ce revenu ?

c) Sachant que la production nécessite des coûts fixes de 5 000 $ et des coûts variables de 0,64 $ l'unité, établir la fonction profit.

d) Quel est le prix de vente donnant le profit maximal ? Quels sont alors le profit et le volume des ventes ?

e) Déterminer les seuils de rentabilité.

7. Une compagnie qui veut développer de nouveaux produits à fait réaliser des analyses pour différents articles. Parmi tous les produits qui ont fait l'objet de ces études, deux ont été retenus, mais un seul pourra être produit, compte tenu de la capacité de l'usine et des investissements nécessaires. On a estimé que, dans chaque cas, le seuil de rentabilité serait de 50 unités. On a établi le revenu marginal de chacun de ces produits, ce qui a donné

$R_{mA}(n) = -2n + 161$ $/unité pour le produit A et

$R_{mB}(n) = -2n + 241$ $/unité pour le produit B, où n est le nombre d'unités.

Estimer le nombre d'unités procurant le revenu maximal. Estimer le revenu maximal. Estimer les revenus pour 50 et 150 unités.

8. Pour aider les petits éleveurs de bovins durant la période hivernale, le ministre de l'agriculture fait voter une subvention aux agriculteurs. Cette subvention donne 200 $ par tête de bétail à condition de ne pas avoir plus de 100 bovins. Pour chaque tête de bétail en surplus de 100, la subvention diminue de 1 $ par bovin.

En considérant le nombre de bovins comme variable indépendante, déterminer la fonction exprimant la subvention totale. Trouver les conditions donnant droit à la subvention totale maximale et le montant de cette subvention. La subvention ayant pour but d'aider les agriculteurs à passer l'hiver et en supposant qu'il en coûte 150 $ par tête de bétail pour entretenir les bêtes au cours de l'hiver, quel est le nombre de têtes de bétail qui permettra à l'agriculteur d'avoir un revenu net maximum pour l'hiver ?