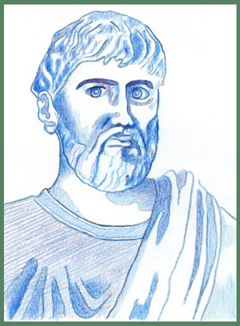
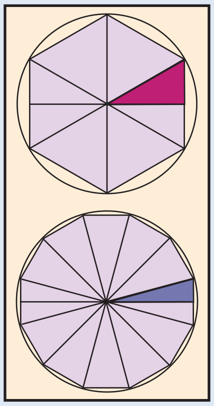
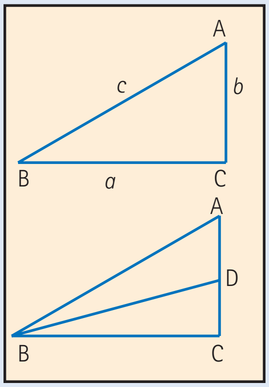


Archimède
~287 à ~212

Archimède est le premier mathématicien à utiliser une méthode rationnelle pour estimer la valeur de ϖ. C'est dans la démonstration de la proposition III du traité *De la mesure du cercle*, qu'il applique cette méthode, qui consiste à déterminer le rapport du périmètre de polygones circonscrits et inscrits au diamètre du cercle.

Archimède
Calcul de π





Polygones circonscrits

En effectuant ses calculs pour estimer π à l'aide de polygones réguliers circonscrits au cercle, Archimède divise l'angle au centre en deux parties égales en traçant la bissectrice BD dans un triangle rectangle ABC. Il cherche alors à déterminer le rapport $\overline{BC}/\overline{DC}$ pour ce faire, il applique la proposition 3 du livre VI des *Éléments d'Euclide*, soit :

La bissectrice d'un angle d'un triangle divise le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents.

Cela signifie que dans le triangle ABC, en traçant la bissectrice de l'angle en B, on a les rapports :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

d'où[1] :

$$\frac{\overline{AD}+\overline{DC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{BC}} \text{ et } \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{BC}}.$$

En échangeant les extrêmes,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation, on a :

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{(\overline{AB}+\overline{BC})^2}{\overline{AC}^2}$$

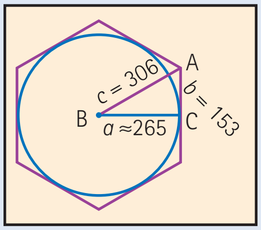
d'où[1] : $$\frac{\overline{BC}^2+\overline{DC}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{(\overline{AB}+\overline{BC})^2+\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2}$$

Par le théorème de Pythagore :

$$\frac{\overline{BD}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{(\overline{AB}+\overline{BC})^2+\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2}$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \sqrt{\frac{(\overline{AB}+\overline{BC})^2+\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2}}$$

En fait, Archimède ne démontre pas ces formules, mais celles-ci sont l'expression moderne des calculs effectués.

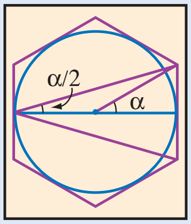


En considérant d'abord l'hexagone circonscrit, Archimède pose 306 comme valeur de c, 153 comme valeur de b et il estime a à 265. On remarque que le côté opposé à l'angle de 30° est la moitié de l'hypoténuse et 265 est une première estimation puisque :

$$\sqrt{306^2 - 153^2} = 265{,}003\ 773\ \ldots$$

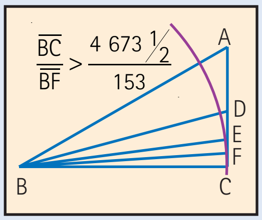
En effectuant ses calculs, Archimède détermine le rapport de l'hypoténuse sur le petit côté de l'angle droit en conservant 153 comme dénominateur de ces rapports. Après avoir effectué les calculs quatre fois, il obtient la suite :

1. Dans toute proportion, la somme des deux premiers termes est au deuxième comme la somme des deux derniers est au quatrième.



$$\frac{306}{153} > \frac{591\,\tfrac{1}{8}}{153} > \frac{1\,172\,\tfrac{1}{8}}{153} > \frac{2\,339\,\tfrac{1}{4}}{153} > \frac{4\,673\,\tfrac{1}{2}}{153}$$

L'angle de son premier triangle est le tiers de l'angle droit, il l'a divisé quatre fois en deux parties égales, l'angle du dernier triangle est alors la quarante-huitième partie de l'angle droit, soit l'angle au centre qui sous-tend la moitié du côté du polygone à 96 côtés et cet angle est égal à l'angle inscrit qui sous-tend le côté du polygone.

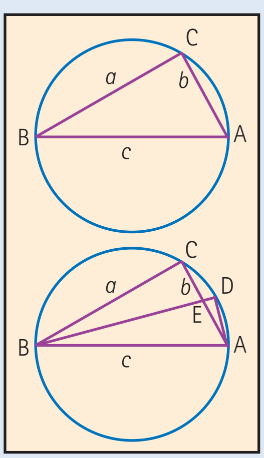


Le dernier rapport est donc celui du diamètre sur le côté du 96-gone régulier circonscrit. Le périmètre du polygone étant plus grand que la circonférence du cercle, ce dernier rapport est plus petit que le rapport du diamètre sur la circonférence du cercle. Le rapport inverse est le rapport du côté du 96-gone régulier circonscrit sur le diamètre du cercle, il est plus grand que le rapport du diamètre sur la circonférence du cercle et :

$$\frac{C}{d} < \frac{P}{d} < \frac{96\times153}{4\,673\,\tfrac{1}{2}} = \frac{14\,688}{4\,673\,\tfrac{1}{2}} < 3\,\tfrac{1}{7}$$

Polygones inscrits

Archimède considère ensuite un triangle inscrit dans un demi-cercle. En traçant la bissectrice BD, il forme le triangle rectangle ABD et il veut déterminer le rapport de l'hypoténuse AB sur la cathète DA. Il montre d'abord que les triangles AED et BDA sont semblables. En effet, ils sont tous les deux rectangles. De plus, les angles inscrits EAD et CBD sont égaux car ils interceptent le même arc CD et ils sont égaux à l'angle DBA puisque BD est la bissectrice de l'angle CBA. La similitude des triangles donne :



$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$$

Puisque BE est la bissectrice de l'angle en B dans le triangle ABC, il s'ensuit que :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \text{ et } \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}+\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AE}+\overline{EC}}$$

et :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{AE}+\overline{EC}}$$

qui donne :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{AC}} \text{ et } \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{AC}}$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation, on a :

$$\frac{\overline{DB}^2}{\overline{DA}^2} = \frac{\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)^2}{\overline{AC}^2}$$

d'où[1] :

$$\frac{\overline{DA}^2+\overline{DB}^2}{\overline{DA}^2} = \frac{\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)^2+\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2}$$

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{DA}^2} = \frac{\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)^2+\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2}$$

et :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DA}} = \sqrt{\frac{\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)^2+\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2}}$$

En considérant d'abord un triangle dont l'angle en B est le tiers d'un angle droit, Archimède choisit comme première longueurs[2], c = 1 560, b = 780 et a = 1 351. En divisant l'angle en deux quatre fois et en effectuant ces opérations chaque fois, il parvient, en estimant les racines carrées, à la suite de rapports :

$$\frac{1\,351}{780} < \frac{3\,013\,\tfrac{3}{4}}{780} < \frac{1838\,\tfrac{9}{11}}{240} < \frac{1\,099\,\tfrac{1}{6}}{66} < \frac{2\,017\,\tfrac{1}{4}}{66}$$

Il explique alors que le rapport inverse est plus petit que le rapport du côté du 96-gone sur son diamètre et que par conséquent :

$$\frac{C}{d} > \frac{P}{d} > \frac{96\times66}{2\,017\,\tfrac{1}{4}} = \frac{6336}{2\,017\,\tfrac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}$$

2. Achimède n'explique pas son choix de valeurs approchées :

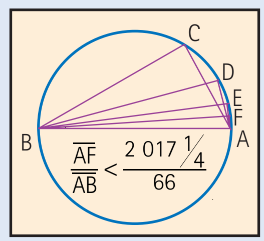
$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1\,351}{780}$$

Ces valeurs devaient être connues de ses contemporains.

Valeur de ϖ en poème

La longueur de chaque mot donne une décimale (un mot de 10 lettres code zéro). La ponctuation ne code rien.

Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
8 9 7 9
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
3 2 3 8 4 6 2 6
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9



Valeur de ϖ par Archimède

Dans sa proposition III, Archimède démontre que le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre satisfait l'inégalité :

$$3\tfrac{10}{71} < \frac{C}{d} < 3\tfrac{10}{70}$$

Facile à mémoriser, la deuxième valeur, 22/7, a été utilisée pendant des siècles comme valeur de ϖ.