Fonctions et modélisation

Exercice 01a: données du problème

Une boulangère produit des beignes dont la fabrication nécessite des frais variables de 2,50$ la douzaine et des frais fixes de 100 $ par semaine. Elle vend ces beignes 7,50 $ $ la douzaine.

Décrire mathématiquement la fonction coût de production hebdomadaire et la fonction revenu hebdomadaire. Représenter graphiquement ces fonctions et déterminer le seuil de rentabilité.

Solution

Les frais variables et les frais fixes étant connus, on peut déterminer directement la fonction coût, soit

$$C(q) = 2{,}50q + 100 \text{ où } q \text{ est le nombre de douzaines.}$$

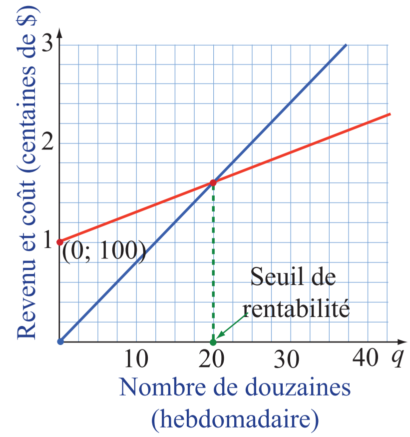
La fonction revenu est une fonction directement proportionnelle, soit :

$$R(q) = 7{,}50q.$$

On détermine le seuil de rentabilité par comparaison des ordonnées,

$$7{,}50q = 2{,}50q + 100 \text{ qui donne } 5q = 100 \text{ d'où } q = 20$$

On obtient 20 douzaines par semaine comme seuil de rentabilité.



Exercice 01b: fonction profit

Déterminer la fonction profit hebdomadaire et représenter graphiquement.

Calculer le seuil de rentabilité. Interpréter ce seuil dans les divers graphiques.

Solution

La fonction profit est la différence entre la fonction revenu et la fonction coût de production, soit :

$$P(q) = 7{,}50q - (2{,}50q + 100) = 5q - 100 \text{ \$}.$$

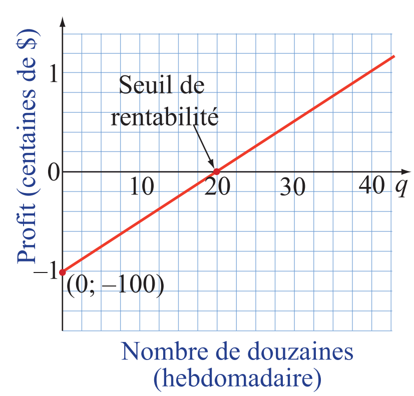
La fonction profit est affine, son ordonnée à l'origine est –100 et sa pente est 5 $/douzaine

Le seuil de rentabilité est le nombre d'articles pour lequel le profit est nul, on cherche donc le zéro de la fonction profit.

$$P(q) = 5q - 100 = 0, \text{ d'où } q = 20.$$

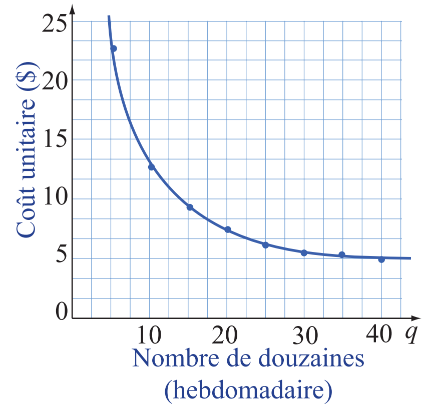
On obtient $q = 20$ douzaines par semaine.

La boulangère fait un profit si elle vend plus de 20 douzaines par semaine. Si elle en vend exactement 20, son profit est nul et si elle en vend moins de 20, elle essuie une perte. Le seuil de rentabilité est l'abscisse du point d'intersection des fonctions revenu et coût, mais c'est également le zéro de la fonction profit.



Exercice 01c: coût unitaire

Décrire mathématiquement la fonction donnant le coût unitaire pour fabriquer q douzaines de beignes. Représenter graphiquement.



Solution

Le coût unitaire pour fabriquer q douzaines est le coût de fabrication de ces q douzaines divisé par q.

$$C_u(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{2{,}5q + 100}{q} = 2{,}5 + \frac{100}{q}.$$

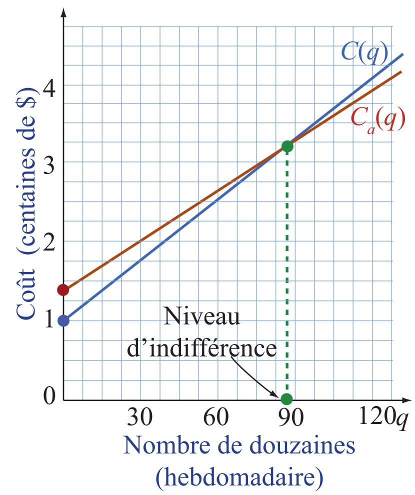
Pour représenter graphiquement cette fonction, il est préférable de calculer quelques correspondances.

q	5	10	15	20	25	30	35	40
$C(q)$	22,50	12,50	9,17	7,50	6,50	5,83	5,36	5,00

Exercice 01d: niveau d'indifférence

La boulangère a la possibilité de modifier le procédé de fabrication et cette modification aurait pour effet de diminuer les frais variables à 2,10 $ la douzaine et d'augmenter les frais fixes à 135 $ par semaine.

Déterminer combien elle doit vendre de douzaines par semaine pour qu'il soit avantageux de modifier son procédé de fabrication.



Solution

On doit déterminer le niveau d'indifférence des deux procédés de fabrication. C'est-à-dire déterminer l'abscisse du point de rencontre de la fonction coût de production actuelle et de la fonction coût du procédé alternatif.

Le coût de production par le procédé alternatif est :

$$C_a(q) = 2{,}10q + 135$$

En appliquant la procédure de comparaison des ordonnées, on obtient :

$$2{,}50q + 100 = 2{,}10q + 135$$

$$0{,}40q = 35, \text{ d'où } q = 87{,}5$$

La boulangère devrait vendre au moins 88 douzaines par semaine pour qu'un changement de procédé soit rentable.

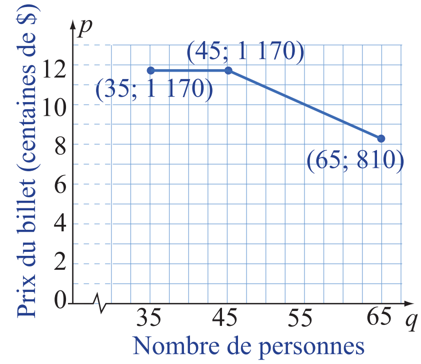
Exercice 02a: fonction par parties

Une compagnie d'autobus nolisés offre des prix spéciaux pour les voyages de groupe. Pour l'une des destinations, le prix est de 1 170 $ si le groupe comprend entre 35 et 45 personnes. Si le groupe est formé de plus de 45 personnes, la compagnie offre un rabais de 18 $ sur le prix individuel pour chacune des personnes du groupe. De plus, l'autobus ne peut contenir que 65 personnes.

Décrire le prix du billet en fonction du nombre de personnes dans le groupe à l'aide d'une fonction par parties.

Solution

La variable indépendante est le nombre de personnes dans le groupe et les variables dépendantes sont le prix individuel et le revenu de la compagnie.



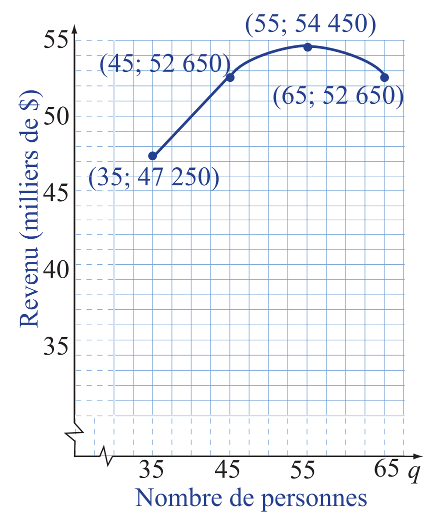
Le prix du billet est décrit à l'aide une fonction par parties, il est de 1 170 $ si q est compris entre 35 et 45 personnes.

Si le groupe compte entre 45 et 65 personnes, le prix diminue en fonction du nombre de personnes. Cette diminution est de (q – 45) fois 18 $.

$$\begin{aligned} p &= 1\,170 - 18\,(q - 45) \\ &= 1\,170 - 18q + 810 \\ &= 1\,980 - 18q \end{aligned}$$

Le prix du billet est donc égal à 1 980 – 18q si q plus grand que 45 mais plus petit ou égal à 65. On a donc :

$$p = \begin{cases} 1\,170 & \text{si } 35 \le q \le 45 \\ 1\,980 - 18q & \text{si } 45 < q \le 65 \end{cases}.$$



Exercice 02b: fonction revenu et revenu maximal

Déterminer la fonction revenu et calculer le nombre de personnes pour lequel le revenu de la compagnie est maximal.

Solution

Le revenu est le prix du billet multiplié par le nombre de personnes dans le groupe. Il est décrit à l'aide d'une fonction par parties.

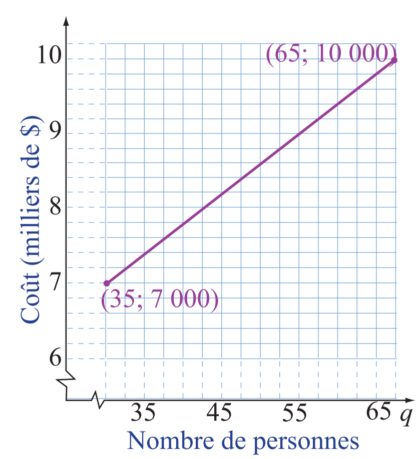
$$R = \begin{cases} 1\,170q & \text{si } 35 \le q \le 45 \\ 1\,980q - 18q^2 & \text{si } 45 < q \le 65 \end{cases}.$$

Dans l'intervalle de 35 à 45, le graphique est une droite de pente 1170 passant par l'origine.

Dans l'intervalle]45; 65], c'est un segment de parabole et le revenu est maximal à

$$q = \frac{-b}{2a} = \frac{1\,980}{2 \times (-18)} = 55 \text{ personnes.}$$

$$R(55) = 1\,980 \times 55 - 18 \times 55^2 = 54\,450\ \$.$$



Exercice 02c: coût et profit

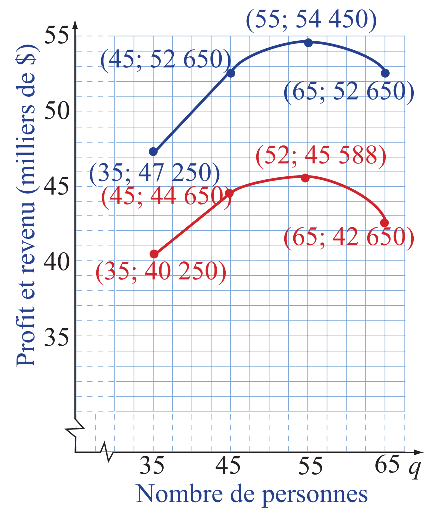
La compagnie doit défrayer le salaire du conducteur, au montant de 3 500 $ et des frais de 100$ pour les rafraîchissements et les goûters servis durant le voyage. Déterminer la fonction coût et la fonction profit. Représenter graphiquement. Déterminer le nombre de passagers pour lequel le profit est maximal et calculer ce profit.

Solution

Puisque les frais fixes et les frais variables sont connus, on peut écrire directement la fonction coût. On obtient :

$$C(q) = 100q + 3\,500.$$

La fonction profit est la différence entre la fonction revenu et la fonction coût de production. Elle est décrite à l'aide d'une fonction par parties.



$$P = \begin{cases} 1\,170q - 3\,500 & \text{si } 35 \le q \le 45 \\ -18q^2 + 1\,880q - 3\,500 & \text{si } 45 < q \le 65 \end{cases}.$$

Dans l'intervalle [35; 45], le graphique est un segment de droite. Dans l'intervalle [45; 65], le graphique est un segment de parabole.

$$q = \frac{-b}{2a} = \frac{1\,880}{2 \times (-18)} = 52{,}2.$$

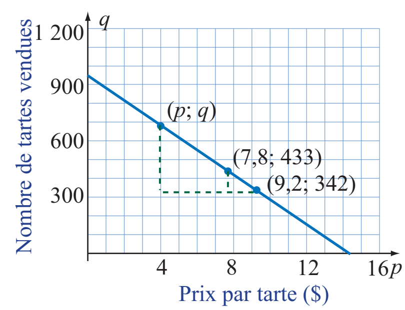
En calculant la valeur de $-b/2a$, on obtient 52,2 comme il s'agit de passagers, il nous faut arrondir à l'entier et le profit est maximal s'il y a 52 passagers.

$$P(52) = -18 \times 52 + 1\,880 \times 55 - 3\,500 = 45\,588\ \$.$$

Le profit est alors de 45 588 $.

Exercice 03a: données du problème

Une boulangère fabrique des tartes aux petits fruits et cherche à accroître son profit mensuel pour cette production. Elle a récemment augmenté le prix de ses tartes à 9,20 $ et constaté qu'elle ne vend plus que 342 tartes par mois pour un revenu de 3 146,40 $ alors qu'avant elle en écoulait 433 au coût de 7,80 $ pour un revenu de 3 377,40 $.



Constatant que son revenu à diminué en augmentant le prix, la boulangère fait appel à vous pour analyser le problème.

Décrire le revenu mensuel en fonction du prix des tartes et représenter graphiquement cette fonction

Solution

Il faut préalablement décrire la relation affine entre le prix et le nombre de tartes. En appliquant la procédure des rapports de variation, on obtient :

$$\frac{q - 433}{p - 7{,}8} = \frac{342 = 433}{9{,}2 - 7{,}8} = -65.$$

$$q - 433 = -65(p - 7{,}8)$$

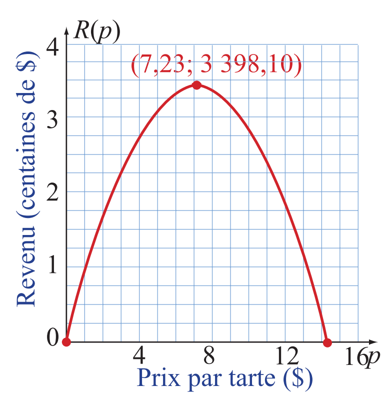
$$q - 433 = -65p + 507$$

$$q = -65p + 940.$$

Le revenu est le produit du nombre de tartes vendues par le prix, soit :

$$R(p) = -65p^2 + 940p.$$

Exercice 03b: graphique de la fonction revenu



Représenter graphiquement la fonction revenu.

Solution

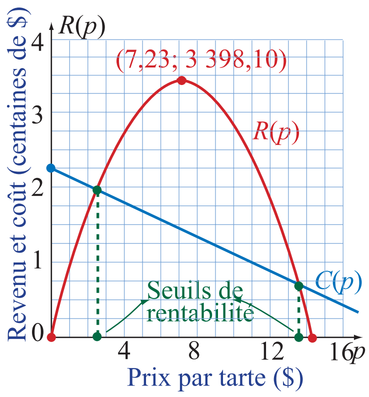
Le graphique du revenu est une parabole dont les zéros sont 0 et 14,46. L'abscisse de son sommet est :

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-940}{2\times(-65)} = 7{,}23.$$

Le revenu atteint sa valeur maximale en vendant les tartes 7,23 \$. La boulangère peut alors en écouler :

$q = -65 \times 7{,}23 + 940 = 470{,}05$, soit 470 tartes pour un revenu mensuel

$$R = 7{,}23 \times 470 = 3\,398{,}10\ \$.$$



Exercice 03c: coût de production

Les frais fixes mensuels sont de 560 \$ et les frais variables de 1,80 \$ par tarte. Déterminer le coût de fabrication mensuel en fonction du nombre de tartes et en fonction du prix. Représenter graphiquement cette dernière.

Solution

Les frais fixes et les frais variables sont connus, on peut écrire directement le coût de fabrication mensuel en fonction du nombre de tartes produites, soit :

$$C(q) = 1{,}80q + 560.$$

Pour obtenir le coût de fabrication mensuel en fonction du prix des tartes, on substitue à la variable q sa description en fonction du prix. On obtient :

$$C(p) = 1{,}80(-65p + 940) + 560 = -117 + 1\,692 + 560 = -117p + 2\,252.$$

L'intervalle pour lequel la boulangère fait un profit est l'intervalle dans lequel le revenu est supérieur au coût.

Exercice 03d: profit mensuel

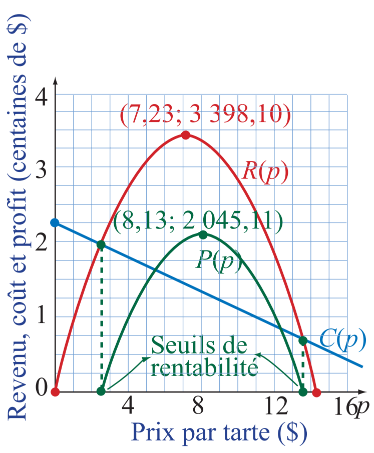
Décrire le profit mensuel en fonction du prix et déterminer à quel prix il faut vendre les tartes pour maximiser le profit.

Solution

On obtient la fonction profit en soustrayant la fonction coût de production de la fonction revenu et en regroupant les termes semblables.

$$\begin{aligned} P(p) &= -65p^2 + 940p - (-117p + 2\,252) \\ &= -65p^2 + 940p + 117p - 2\,252 \\ &= -65p^2 + 1\,057p - 2\,252 \end{aligned}$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-1\,057}{2\times(-65)} = 8{,}13.$$



Pour maximiser son profit, la boulangère doit vendre ses tartes 8,13 \$.

$q = -65 \times 8{,}13 + 940 = 411{,}55$, soit 411 tartes pour un profit de

$P(p) = -65 \times 8{,}13^2 + 1\,057 \times 8{,}13 - 2\,252 = 2\,045{,}11$ \$ par mois.

Taux de variation moyen

Exercice 01A: Domaine de validité

Le propriétaire d'une salle de spectacles de 1 500 places est conscient que le nombre de spectateurs dépend du prix du billet, ce qui affecte le revenu. Il a déterminé que la relation entre le prix et le nombre de billets vendus est

$$q = -15p + 2\,100$$

et que le revenu en fonction du prix du billet

$$R(p) = -15p^2 + 2\,100p.$$

Représenter graphiquement la fonction décrivant le revenu et donner le domaine de validité de celle-ci.

Solution

Pour déterminer le domaine de validité, il faut calculer le prix du billet pour lequel la salle sera remplie à pleine capacité.

$$q = -15p + 2\,100 = 1\,500$$

$$-15p = 600\text{, d'où } p = 40\ \$.$$

Si le prix du billet est de 40 \$, le propriétaire est certain de remplir la salle.

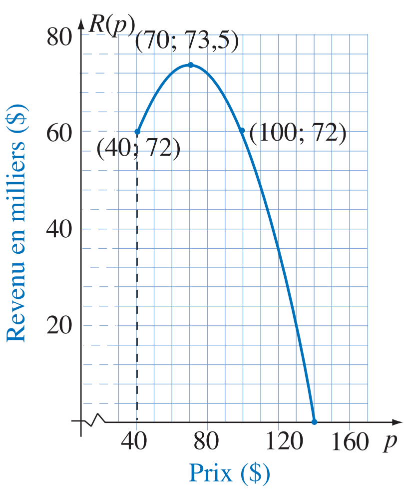
Il faut également déterminer le prix du billet pour lequel la salle reste vide.

$$q = -15p + 2\,100 = 0$$

$$-15p = -2\,100\text{, d'où } p = 140\ \$.$$

Si le prix du billet est de 140 \$, personne n'achète de billet.

Le domaine de validité des deux modèles est donc [40; 140].



Exercice 01B: Graphique du revenu

Représenter graphiquement la fonction décrivant le revenu.

Solution

Le revenu est décrit par une fonction quadratique dont le sommet est atteint si le prix du billet est de 70 \$.

À 40\$ du billet, le revenu est

$$R(40) = -15 \times 40^2 + 2\,100 \times 40 = 60\,000\ \$.$$

À 70 \$ du billet, le revenu est

$$R(70) = -15 \times 70^2 + 2\,100 \times 70 = 73\,500\ \$.$$

q	40	70	80	90	100	110	120	130	140
$C(q)$	60,0	73,5	72,0	67,5	60,0	49,5	36,0	19,5	0,0

Exercice 01C: Taux de variation moyen

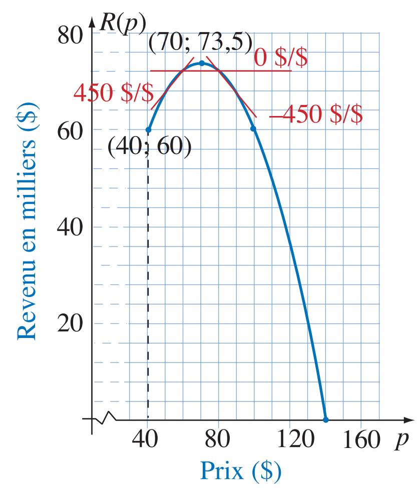
Le propriétaire vous demande de déterminer le taux de variation moyen du revenu si le prix du billet varie dans les intervalles [50 60], [60; 80] et [80; 90]. Interpréter les résultats.

Solution

Le taux de variation est le rapport de la variation du revenu sur la variation du prix .

En effectuant le calcul dans l'intervalle [50; 60] on obtient

$$\left.\frac{\Delta R}{\Delta p}\right|_{[50;\ 60]} = \frac{R(60)-R(50)}{60-50} = \frac{72\ 000-67\ 500}{10} = \frac{4\ 500}{10} = 450\ \$/\$$$



Ce qui signifie que dans cet intervalle, une augmentation de 1 \$ du prix du billet donne en moyenne une augmentation de 450 \$ du revenu.

$$\left.\frac{\Delta R}{\Delta p}\right|_{[60;\ 80]} = \frac{R(80)-R(60)}{80-60} = \frac{72\ 000-72\ 000}{20} = \frac{0}{20} = 0\ \$/\$$$

En effectuant le calcul dans l'intervalle [60; 80] on obtient 0 \$/\$, ce qui signifie que dans cet intervalle, une augmentation de 1 \$ du prix du billet, en moyenne, n'a pas d'effet sur le revenu.

En effectuant le calcul dans l'intervalle [80; 90] on obtient :

$$\left.\frac{\Delta R}{\Delta p}\right|_{[80;\ 90]} = \frac{R(90)-R(80)}{90-80} = \frac{67\ 500-72\ 000}{10} = \frac{-4\ 500}{10} = -450\ \$/\$$$

Ce qui signifie que dans cet intervalle, une augmentation de 1 \$ du prix du billet, en moyenne, donne une diminution du revenu de 450 \$.

Taux de variation ponctuel

Exercice 02A: Domaine de validité et graphique

Une chocolatière a établi que la demande pour ses boîtes de chocolat en fonction de leur prix

$$q = –24p + 1\ 200$$

et la relation entre le revenu engendré et le prix des boîtes

$$R(p) = –24p^2 + 1\ 200p.$$

Représenter graphiquement la fonction décrivant le revenu et donner le domaine de validité de celle-ci.

Solution

Domaine de validité

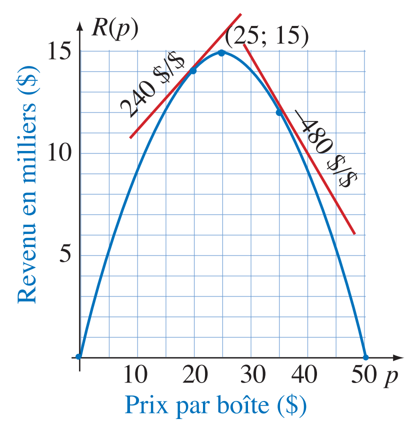
Pour déterminer le domaine de validité, il faut déterminer le prix du billet pour lequel la demande est nulle.

$$q = –24p + 1\ 200 = 0$$

$$–24p = 1\ 200, \text{ d'où } p = 50\ \$.$$

Si le prix de la boîte est de 50 $, la chocolatière ne vend aucune boîte de ses chocolats. De plus, la chocolatière n'a aucun intérêt à fixer un prix inférieur à 0 $.

Le domaine de validité des deux modèles est donc [0; 50].



Graphique du revenu

Le revenu est décrit par une fonction quadratique dont le sommet est atteint si le prix des boîtes est :

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-1\ 200}{-48} = 25\ \$.$$

À 25 $ la boîte, le revenu est

$$R(25) = –24 \times 25^2 + 1\ 200 \times 25 = 15\ 000\ \$.$$

Il est à noter que le revenu est maximal lorsque le prix des boîtes est de 25 $. À ce prix, le revenu est de 15 000 $.

Exercice 02B: Taux de variation ponctuel à 20 $

La chocolatière vous demande de déterminer le taux de variation ponctuel du revenu si le prix de la boîte est de 20 $. Interpréter le résultat.

Solution

Pour estimer le taux de variation ponctuel, on calcule le taux de variation moyen sur une suite d'intervalles de plus en plus petits à gauche et à droite de 20, de façon à voir la tendance qui se dégage des valeurs obtenues.

Pour une variation $\Delta p = 0{,}5$, l'intervalle est [20; 20,5], le taux de variation est

$$\left.\frac{\Delta R}{\Delta p}\right|_{[20;\ 20{,}5]} = \frac{R(20{,}5)-R(20)}{0{,}5} = \frac{14\ 514-14\ 400}{0{,}5} = 228\ \$/\$$$

Intervalles à gauche	
Δp	TVM
–0,5	252,00
–0,1	242,40
–0,01	240,24
–0,001	240,02

Intervalles à droite	
Δp	TVM
0,5	228,00
0,1	237,60
0,01	239,76
0,001	239,97

En calculant le taux de variation moyen sur des intervalles emboîtés de plus en plus petits à gauche et à droite de 20, on obtient les résultats compilés dans les tableaux ci-contre.

Ces calculs nous permettent d'estimer que le taux de variation ponctuel à 20 $ est d'environ 240 $/$. Cela signifie que le revenu a tendance à augmenter de 240 $ si la chocolatière augmente son prix de 1 $ la boîte, lorsque ce prix est de 20 $.

Exercice 02C: Taux de variation ponctuel à 35 $

La chocolatière vous demande de déterminer le taux de variation ponctuel du revenu si le prix de la boîte est de 35 $. Interpréter le résultat.

Solution

Pour estimer le taux de variation ponctuel, on calcule le taux de variation moyen sur une suite d'intervalles de plus en plus petits à gauche et à droite de 35, de façon à voir la tendance qui se dégage des valeurs obtenues.

Pour une variation $\Delta p = 0{,}5$, l'intervalle est [3; 35,5], le taux de variation est :

$$\left.\frac{\Delta R}{\Delta p}\right|_{[35;\ 35{,}5]} = \frac{R(35{,}5)-R(35)}{0{,}5} = \frac{12\ 354-12\ 600}{0{,}5} = -492\ \$/\$$$

Intervalles à gauche	
Δp	TVM
–0,5	–468,00
–0,1	–477,60
–0,01	–479,76
–0,001	–479,97

Intervalles à droite	
Δp	TVM
0,5	–492,00
0,1	–482,40
0,01	–480,24
0,001	–480,02

En calculant le taux de variation moyen sur des intervalles emboîtés de plus en plus petits à gauche et à droite de 35, on obtient les résultats compilés dans les tableaux ci-contre.

Ces calculs nous permettent d'estimer que le taux de variation ponctuel à 35 $ est d'environ –480 $/$. Cela signifie que le revenu a tendance à diminuer de 480$ si la chocolatière augmente son prix de 1 $ la boîte, lorsque ce prix est de 35$.

Dérivée de fonctions composées

Exercice 01A: Énoncé du problème et calcul de valeurs

Une compagnie estime que la demande mensuelle pour un article est inversement proportionnelle au prix.

$$V(p)=\frac{6\ 000}{p}\ \text{ unités/mois}$$

L'augmentation du coût de production force la compagnie à modifier le prix de vente de cet article. Pour minimiser l'impact sur le volume de vente, la compagnie prévoit augmenter graduellement le prix au cours des six prochains mois de telle sorte que le prix soit donné par le modèle :

$$p(t)=36+6\sqrt{t}\ \$$$

où t est le temps en mois et p le prix.

Calculer le prix actuel et la demande actuelle ainsi que le prix et la demande dans 6 mois.

Solution

Le prix actuel est $p(0)=36+6\sqrt{0}=36\ \$$.

La demande actuelle est $V(36)=\dfrac{6\ 000}{36}\approx 167\ \text{ unités/mois}$.

Le prix dans 6 mois sera $p(6)=36+6\sqrt{6}=50,70\ \$$.

En arrondissant ce prix, la demande dans 6 mois est l'image de 51 par la fonction demande.

$$V(51)=\frac{6\ 000}{51}\approx 118\ \text{ unités/mois}$$

Exercice 01B: Fonction dérivée

Déterminer la fonction décrivant le taux de variation de la demande en fonction du temps.

Solution

La demande dépend du prix et le prix dépend du temps. La demande est donc une fonction composée du temps.

On dérive chacune des fonctions par rapport à sa variable dépendante.

$$\frac{dV}{dp}=\frac{d}{dp}\left(\frac{6\ 000}{p}\right)=\frac{d}{dp}\left(6\ 000\,p^{-1}\right)=-6\ 000\,p^{-2}=\frac{-6\ 000}{p^2}\ \text{ unités/\$}$$

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}\left(36+6\sqrt{t}\right)=\frac{d}{dt}\left(36+6t^{1/2}\right)=6\times\frac{1}{2}t^{-1/2}=\frac{3}{\sqrt{t}}\ \text{ \$/mois}$$

On fait le produit des expressions obtenues, on substitue à p la relation décrivant le prix et on simplifie.

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dp}\times\frac{dp}{dt}=\frac{-6\ 000}{p^2}\ \text{unités}/\$\times\frac{3}{\sqrt{t}}\ \$/\text{mois}$$

$$=\frac{-6\ 000}{(36+6\sqrt{t})^2}\times\frac{3}{\sqrt{t}}\ \text{unités}/\text{mois}=\frac{-500}{\sqrt{t}(6+\sqrt{t})^2}\ \text{unités}/\text{mois}.$$

On obtient $V'(t)=\dfrac{-500}{\sqrt{t}(6+\sqrt{t})^2}$ unités/mois.

Exercice 01C: Calcul du taux de variation

Calculer le taux de variation de la demande dans un mois et dans quatre mois.

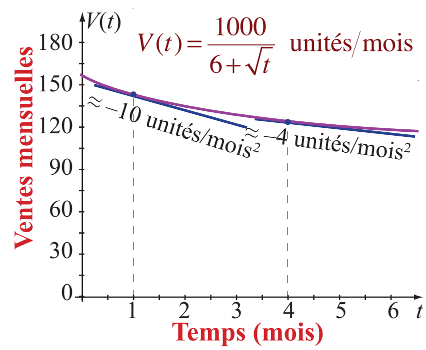
Solution

Dans un mois, le taux de variation sera

$$V'(1)=\frac{-500}{\sqrt{1}(6+\sqrt{1})^2}\approx-10\ \text{unités}/\text{mois}.$$

Dans quatre mois, le taux de variation sera

$$V'(4)=\frac{-500}{\sqrt{4}(6+\sqrt{4})^2}\approx-4\ \text{unités}/\text{mois}.$$



On obtient que dans quatre mois, la demande aura tendance à diminuer de 4 unités par mois à cause de l'augmentation du prix.

Exercice 02A: Énoncé du problème et fonction dérivée

Une compagnie désirant accroître sa part de marché pour un de ses produits entreprend une campagne publicitaire. Grâce à cette campagne, le volume de vente pour ce produit, t mois après le début de la campagne devrait être décrit par la fonction

$$V(t) = 1\ 200 - 800e^{-0,25t}\ \text{unités/mois}$$

Calculer le taux de variation du volume de vente après un mois de campagne, après quatre mois de campagne

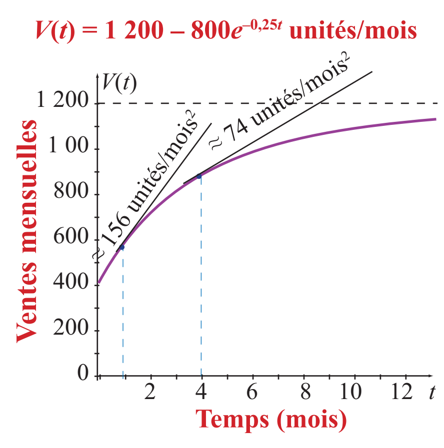
Solution

On détermine d'abord la fonction dérivée en appliquant la procédure de dérivation d'une fonction composée de la forme e^u.

$$V'(t)=\frac{d}{dt}\left(1\ 200-800e^{-0,25t}\right)=\frac{d}{dt}(1\ 200)-800\frac{d}{dt}\left(e^{-0,25t}\right)$$

$$=0-800e^{-0,25t}\frac{d}{dt}(-0,25t)=-800e^{-0,25t}\times(-0,25)$$

$$=200e^{-0,25t}\ \text{unités}/\text{mois}^2.$$



Après un mois de campagne, le taux de variation sera

$$V'(1)=200e^{-0,25\times1}=155,76\approx156\ \text{unités}/\text{mois}^2$$

Après quatre mois de campagne, le taux de variation sera

$$V'(4) = 200e^{-0{,}25\times 4} = 73{,}57 \approx 74 \ \text{unités/mois}^2$$

Exercice 02B: Durée de la campagne

Sachant que la vente d'une unité de ce produit génère un profit de 160$ et que la campagne publicitaire coûte 4 000$ par mois, déterminer combien de temps devrait durer cette campagne.

Solution

Pour que la campagne soit rentable, il faut qu'elle procure un accroissement de profit plus élevé que le coût de la campagne.

Le nombre d'articles vendus qui procure cet accroissement de profit est :

$$\frac{4\ 000}{160} = 25$$

Il faut donc que le volume de vente s'accroisse d'au moins 25 articles mensuellement. On doit donc avoir

$$200e^{-0{,}25t} \geq 25, \text{ d'où } e^{-0{,}25t} \geq 0{,}125 \text{ et } -0{,}25t \geq \ln\ 0{,}125 \text{ qui donne}$$

$$t \leq \frac{\ln 0{,}125}{-0{,}25} = 8{,}31$$

On estime donc que, pour être rentable, la campagne devrait durer 8 mois.

Exercice 03A: Énoncé du problème et fonction dérivée

Le directeur d'une succursale a établi la relation entre la demande hebdomadaire pour un article de consommation courante et le prix.

$$D(p) = \frac{800}{\sqrt{8+5p}} \ \text{unités/semaine}$$

Déterminer la fonction décrivant le taux de variation de la demande par rapport au prix.

Solution

On exprime la racine carrée à l'aide d'un exposant et on applique l'opérateur de dérivation à cette fonction composée.

$$D'(p) = 800\left((8+5p)^{-1/2}\right) = 800 \times \frac{-1}{2}\left((8+5p)^{-3/2}\right)\frac{d}{dp}(8+5p)$$

$$= 800 \times \frac{-1}{2}\left((8+5p)^{-3/2}\right) \times 5 = \frac{-4\ 000}{2(8+5p)^{3/2}}$$

$$= \frac{-2\ 000}{(8+5p)\sqrt{8+5p}} \ \text{unités/semaine}\cdot\text{s}.$$

Exercice 03B: Différentielle

À l'aide de la différentielle, déterminer l'impact sur les ventes si le prix est porté de 2,00 $ à 2,50 $.

Solution

La différentielle de la demande est le produit de la dérivée et de la différentielle du prix.

$$dD = D'(p)dp = \frac{-2\ 000dp}{(8+5p)\sqrt{8+5p}} \text{ unités/semaine}$$

On évalue la différentielle de la demande si le prix passe de 2 $ à 2,50 $,

$$dD|_{2;\ 0,5} = D'(p)dp = \frac{-2\ 000\times 0,5}{(8+5\times 2)\sqrt{8+5\times 2}}$$

$$= \frac{-2\ 000\times 0,5}{18\sqrt{18}} = -13,09 \approx -13 \text{ unités/semaine}$$

Si le prix passe de 2 $ à 2,50 $, la demande aura tendance à diminuer d'environ 13 unités par semaine.

Exercice 03C: Modèle d'approximation linéaire

En utilisant un modèle d'approximation linéaire centré à p = 2,00 $, estimer la demande si le prix est augmenté à 3,50 $.

Solution

Le modèle d'approximation linéaire au point d'abscisse 2 est l'équation de la tangente en ce point.

Pour déterminer cette équation, on doit calculer la demande à 2 $ et le taux de variation ponctuel à 2 $.

$$D(2) = \frac{800}{\sqrt{8+5\times 2}} = \frac{800}{\sqrt{18}} = 189 \text{ unités/semaine}$$

$$D'(2) = \frac{-2\ 000}{18\sqrt{18}} = -26,18 \approx -26 \text{ unités/semaine}\cdot\$$$

Le modèle linéaire est

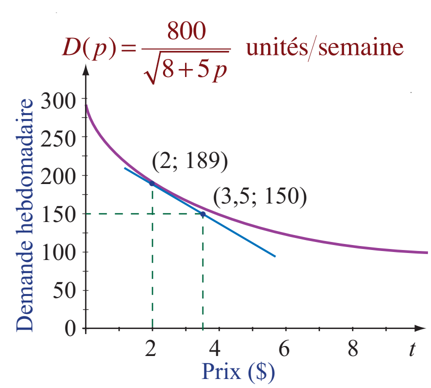
$$L(p) = D(2) + D'(2)\ (p-2) = 189 - 26(p-2) \text{ unités/semaine.}$$

Pour prévoir l'impact si le prix de vente est porté à 3,50 $, on calcule l'image de 3,50 par le modèle d'approximation linéaire.

$$L(3,50) = 189 - 26(3,50-2) \text{ unités/semaine}$$

$$= 189 - 26 \times 1,50 \text{ unités/semaine } = 150 \text{ unités/semaine.}$$

Par conséquent, en augmentant le prix de 2,00 $ à 3,50 $, la demande hebdomadaire passerait à 150 unités/semaine, soit une diminution d'environ 39 unités/semaine. Il est à noter que la diminution est estimée par la différentielle et le volume de vente hebdomadaire par le modèle d'approximation linéaire.



Exercice 04A: Énoncé du problème et fonction dérivée

Le gérant d'un magasin d'appareils et de jeux vidéo estime que les ventes totales d'un nouveau jeu vidéo à partir de sa mise en marché sont décrites par la fonction à l'écran

$$V_T(t) = 100t + 500e^{-0,4t} \text{ unités}$$

Déterminer la fonction décrivant le taux de variation des ventes totales. Calculer le taux de variation des ventes totales après 1 mois et après deux mois.

Solution

On applique l'opérateur de dérivation pour obtenir la fonction dérivée.

$$\begin{aligned} V_T\,'(t) &= \frac{d}{dt}\left(160t + 500e^{-0,2t}\right) = 160\frac{d}{dt}(t) + 500\frac{d}{dt}\left(e^{-0,2t}\right) \\ &= 160 \times 1 + 500e^{-0,2t}\frac{d}{dt}(-0,2t) \\ &= 160 + 500e^{-0,2t} \times -0,2 \\ &= 160 - 100e^{-0,2t} \text{ unités/mois} \end{aligned}$$

Le taux de variation des ventes totales après 1 mois est l'image de 1 par la fonction dérivée. On obtient qu'après un mois le total des ventes a tendance à augmenter de 78 unités par mois.

$$V_T\,'(1) = 160 - 100e^{-0,2\times1} = 78 \text{ unités/mois}$$

Le taux de variation des ventes totales après 1 mois est l'image de 1 par la fonction dérivée, On obtient qu'après deux mois le total des ventes a tendance à augmenter de 93 unités par mois.

$$V_T\,'(2) = 160 - 100e^{-0,2\times2} = 93 \text{ unités/mois}$$

Exercice 04B: Modèle d'approximation linéaire

Définir un modèle d'approximation linéaire en choisissant le quatrième mois comme centre d'approximation. À l'aide de ce modèle, estimer les ventes totales après six mois.

Solution

Le modèle d'approximation linéaire au point d'abscisse 4 est l'équation de la tangente en ce point. Pour déterminer cette équation, on doit calculer les ventes totales à 4 mois et le taux de variation des ventes à 4 mois.

$$V_T(4) = 160 + 500e^{-0,2\times4} = 864 \text{ unités/mois}$$

$$V_T\,'(4) = 160 - 100e^{-0,2\times4} = 115 \text{ unités/mois}$$

On obtient :

$$L(t) = V_T(4) + V_T\,'(4)\,(t-4) = 864 + 115(t-4) \text{ unités.}$$

Au temps $t = 6$, le modèle donne

$$L(6) = 864 + 115(6-4) = 1\,094 \text{ unités.}$$

Exercice 04C: Dérivée seconde

Déterminer la fonction décrivant le taux de variation des ventes mensuelles. Calculer le taux de variation des ventes mensuelles après 1 mois, après deux mois.

Solution

La fonction décrivant le taux de variation des ventes mensuelles est la dérivée seconde. On applique donc l'opérateur de dérivation à la dérivée première.

$$V_T\,''(t) = \frac{d}{dt}\left(160 - 100e^{-0,2t}\right) = \frac{d}{dt}(160) - 100\frac{d}{dt}\left(e^{-0,2t}\right)$$

$$= 0 - 100e^{-0,2t}\frac{d}{dt}(-0,2t) = -100e^{-0,2t} \times -0,2$$

$$= 20e^{-0,2t} \text{ unités}/\text{mois}^2$$

$$V_T\,''(1) = 20e^{-0,2\times 1} = 16\,\text{unités}/\text{mois}^2$$

$$V_T\,''(2) = 20e^{-0,2\times 2} = 13\,\text{unités}/\text{mois}^2$$

Après un mois, le volume de ventes mensuelles a tendance à augmenter d'environ 16 unités par mois.

Après deux mois, le volume de ventes mensuelles a tendance à augmenter d'environ 13 unités par mois.

Exercice 04D: Modèle d'approximation linéaire

Définir un modèle d'approximation linéaire des ventes mensuelles en choisissant le deuxième mois comme centre d'approximation. À l'aide de ce modèle, estimer les ventes mensuelles au quatrième mois.

Solution

Le modèle d'approximation linéaire au point d'abscisse 2 est l'équation de la tangente en ce point. Pour déterminer cette équation, on doit calculer le volume de vente mensuel au deuxième mois ainsi que le taux de variation de celui-ci.

$$V_T\,'(2) = 160 - 100e^{-0,2\times 2} = 93\,\text{unités}/\text{mois}$$

$$V_T\,''(2) = 20e^{-0,2\times 2} = 12\,\text{unités}/\text{mois}^2$$

$$L(t) = 93 + 13(t - 2) \text{ unités/mois.}$$

Pour estimer le volume de ventes au quatrième mois, on doit calculer l'image de 4 par le modèle d'approximation linéaire.

$$L(4) = 93 + 13(4 - 2) = 119 \text{ unités/mois.}$$

Le modèle prédit qu'au cours du quatrième mois, on écoulera 119 unités de ce jeu vidéo.

