Augustin Cauchy
1789-1857

Dans ses cours d'analyse, Augustin-Louis Cauchy a défini la notion de limite et s'est servi de cette notion pour établir des fondements rigoureux au calcul différentiel et intégral.

Augustin Cauchy
Quelques définitions

Dans l'introduction de son *Cours d'analyse*, Cauchy écrit :

> *J'ai cherché à employer des méthodes ayant toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de ce type, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées que comme un moyen d'indiquer le chemin vers la vérité, mais sans aucun rapport avec l'exactitude dont doivent s'enorgueillir les sciences mathématiques.*

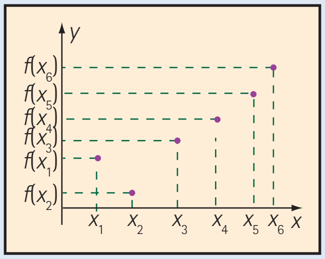
Dans cette introduction, Cauchy fait référence au fait que depuis la fin de XVI^{e} siècle, on considère que ce qui est vrai pour les nombres réels est vrai également pour les nombres complexes, ce qui est vrai pour les grandeurs finies peut être étendu aux grandeurs infinitésimales et ce qui est vrai pour les séries convergentes est vrai également pour les séries divergentes.

Sa démarche pour établir des fondements rigoureux débute par la définition de fonction.

Notion de fonction

> *Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles, que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend le nom de variable indépendante; et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable.*

On remarque que dans cette définition, la notion de fonction se limite à des correspondances que l'on peut définir à l'aide d'une formule ou règle de correspondance. Ainsi, dans la définition moderne, le graphique ci-contre représente une fonction, même s'il n'y a pas de règle de correspondance décrivant le lien entre les variables, ce qui n'est pas le cas pour Cauchy.



Notion de limite

Cauchy définit la notion de limite comme suit :

Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.

Considérons la suite des termes de la forme $1/2^n$:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$$

En montrant que les valeurs successives des termes de cette suite s'approchent indéfiniment de 0, de manière à en différer aussi peu que l'on voudra, on peut conclure que la limite de cette suite est 0. De plus, si on considère les sommes partielles des termes de cette suite, on obtient :

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

. . .

Ces sommes forment une autre suite, la suite des sommes partielles :

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots\right\}$$

En montrant que les valeurs successives des termes de cette suite s'approchent indéfiniment de 1, de manière à en différer aussi peu que l'on voudra, on peut conclure que la limite de cette suite est 1.

Continuité d'une fonction

Il définit ensuite la continuité.

Lorsque, la fonction $f(x)$ admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence $f(x + h) - f(x)$[1] *est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que $f(x)$ est une fonction continue de la variable x entre les limites dont il s'agit.*

Pour que la différence des images $f(x + h) – f(x)$ entre deux valeurs infiniment proches donne une valeur qui ne soit pas infiniment petite, il faut que la fonction ait un saut, fini ou infini, dans l'intervalle $[x; x + h]$ comme dans l'illustration ci-contre.

Fonction dérivée

Si, lorsque h devient infiniment petit le rapport aux différences :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

admet une limite finie, on la note $f'(x)$, c'est une fonction de x, appelée fonction dérivée.

Quoi de neuf avec cette définition ?

La dérivée est expressément définie comme la limite d'un rapport et cette limite est une forme indéterminée 0/0. Dans notre démarche d'apprentissage, nous avons d'abord estimé le taux de variation à partir des valeurs d'un rapport de ce type lorsque h devient de plus en plus proche de 0 par la gauche et par la droite. Puis, nous avons vu comment évaluer la limite en déterminant une expression continue qui a la même limite que ce rapport lorsque h tend vers 0.

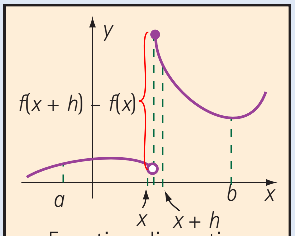
Valeurs intermédiaires

On retrouve également dans les notes de Cauchy le théorème des valeurs intermédiaires :

Si une fonction f est continue entre les limites a et b et que l'on désigne par k une quantité intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, on pourra toujours satisfaire l'équation $f(x) = k$ pour au moins une valeur de x comprise entre a et b.

Ces quelques définitions permettent de voir que la façon dont Cauchy structure le calcul différentiel est très proche parente de la nôtre.

1. h désige une quantité infiniment petite.



Fonction discontinue sur $[a; b]$

Cauchy définit directement la continuité sur un intervalle alors que l'approche moderne, qui fut également celle de Bernard Bolzano, est de définir préalablement la continuité en un point pour ensuite définir la continuité sur un intervalle.

Une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue en chacun des points de l'intervalle.