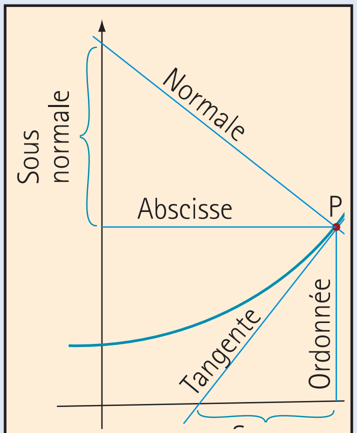
Le concept de fonction était sous-jacent à l'établissement des tables de cordes dans l'Antiquité et dans les travaux de Nicole Oresme et de Galilée. Cependant, le vocable fonction est apparu dans des articles de Leibniz parus dans les *Acta eruditorum*. **Le sens attribué à ce mot a évolué avec le développement du calcul différentiel. La définition de fonction que l'on retrouve de nos jours dans les livres de mathématiques est le fruit de cette évolution.**

Le vocable fonction de Leibniz à Bourbaki

Dans ses articles des *Acta eruditorum*, *Leibniz utilise les termes function et functiones* qui sont des mots forgés à partir du participe passé du verbe *fungor* qui signifie « accomplir une tâche ». Il a par la suite francisé le mot pour obtenir le mot *fonction* qu'il définit ainsi :

J'appelle fonction toutes les portions des lignes droites, qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe, et aux points de la courbe.

Leibniz (1646-1716)



La longueur de chacun de ces segments est modifiée si on considère un autre point sur la courbe.

Leibniz donne cette définition dans l'article paru en 1694, dont le titre francisé est *Nouvel emploi du calcul différentiel appliqué à différentes constructions possibles d'une courbe à partir d'une propriété de ses tangentes.* Leibniz poursuit en indiquant :

Telles sont l'abscisse, l'ordonnée, la tangente, la normale, la sous-tangente, le segment coupé par la tangente, le segment coupé par la normale, le segment délimité par ces deux dernières, le rayon d'osculation, c'est-à-dire le rayon de courbure et quantité d'autres.

Leibniz (1646-1716)

En d'autres mots, tous les segments de droite apparentés à une courbe en un point. Le terme fonction est repris est repris par Jacques Bernoulli qui lui donne un sens plus algébrique :

On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.

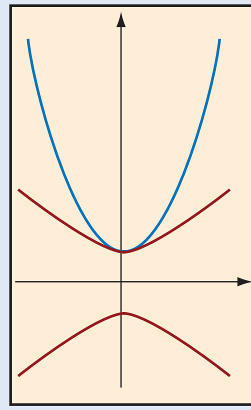
Bernoulli, Jacques (1667-1748)

Bernoulli, comme tous les mathématiciens de l'époque, ne fait pas de distinction entre relation et fonction. Ainsi,

$y = 2x^3 + 3$

$y^2 = 2x^2 + 3$

sont toutes deux des fonctions. Il faut se rappeler qu'au début de la géométrie analytique, il n'y avait qu'une axe qui pouvait être horizontal ou vertical.



Dans sa définition, Euler précise la notion de dépendance d'une variable par rapport à une autre.

Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonction de x.

Euler (1707-1783)

En 1797, Joseph-Louis Lagrange présente la première ébauche de notation des fonctions et cette ébauche tient compte des fonctions de deux variables.

On appelle fonction d'une ou plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f, ou F; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée de cette variable, comme a+bx., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi fx désignera une fonction de x, f(a + bx), désignera une fonction a + bx, etc. Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x, y, nous écrirons f(x, y), et ainsi des autres.

Lagrange, (1736-1813)

Dans sa définition, Cauchy inclut celle de variable indépendante.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable.

Cauchy (1789-1857)

L'univocité de l'image qui caractérise une fonction et la distingue d'une relation est présente dans les définitions de Riemann et de Dedekind. De plus, les deux précisent qu'il n'y a aucune restriction sur la façon dont la correspondance entre les variables est définie et indiquent que le domaine de validité d'une fonction peut être un intervalle.

Une quantité y est une fonction (univoque) d'une quantité x, dans un intervalle donné quand, à chaque valeur attribuée à x dans cet intervalle, correspond une valeur unique et déterminée de y, sans rien spécifier sur la façon dont les diverses valeurs de y s'enchaînent les unes aux autres.

Riemann (1826-1866)

y est une fonction de x sur un l'intervalle]a, b[si pour toute valeur de x dans cet intervalle on associe une unique valeur de y. La nature de la correspondance n'a aucune importance.

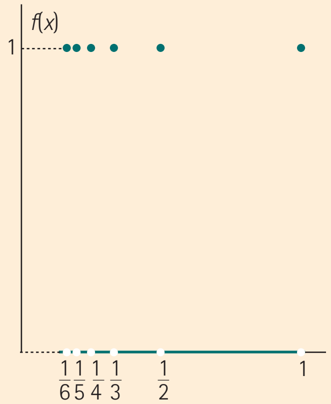
Richard Dedekind (1831-1916)

Puisqu'il n'y a aucune restriction sur la façon dont la correspondance entre les variables est définie, on peut définir une fonction de l'intervalle [0, 1] dans l'ensemble {0, 1} en faisant correspondre 0 aux nombres de cet intervalle, sauf à ceux de la forme 1/*n* où *n* est un nombre naturel auxquels on assigne 1 comme image. On obtient le graphique ci-contre.

La définition de fonction posée par Nicolas Bourbaki est plus générale et plus abstraite.

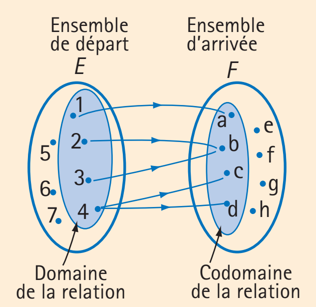
Soient E et F, deux ensembles distincts ou non, une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle en y ou relation fonctionnelle de E vers F, si pour tout x appartenant à E, il existe un seul y appartenant à F, qui soit dans la relation considérée avec x. On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément x de E, l'élément y dans F qui se trouve dans la relation donnée avec x; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée.

Bourbaki , 1939



$f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ où } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$



La définition de Bourbaki s'applique dans divers contextes, même si les ensembles *E* et *F* ne sont pas des ensembles de nombres.