TAUX *de* VARIATION

1

Analyser des phénomènes divers à l'aide du taux de variation.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont :

- le calcul du taux de variation moyen, à partir d'un ensemble de valeurs, d'une représentation graphique ou de la règle de correspondance entre les variables.
- l'estimation du taux ponctuel comme valeur limite des taux de variation moyens;
- l'évaluation algébrique du taux ponctuel en appliquant la définition.

Variation et taux de variation 2
Définitions et calculs
Taux de variation et grandeurs physiques
Taux de variation ponctuel
Interprétation graphique du taux ponctuel
Taux ponctuel, valeur limite
Exercices 13
Limite et taux ponctuel . . 16
Notion intuitive de limite
Formes indéterminées
Évaluation du taux de variation ponctuel
Algèbre de l'infini
Le paradigme aristotélicien, note historique
Exercices 30
Exercices de synthèse. . . 32

OBJECTIFS

1.1 Calculer et interpréter le taux de variation moyen d'une fonction sur un intervalle.

1.2 Estimer et interpréter un taux de variation ponctuel en calculant des valeurs approchées.

1.3 Déterminer un taux de variation ponctuel en évaluant algébriquement une limite.

1.1 Variation et taux de variation

Nous présentons dans cette section la notion de taux de variation. Nous illustrons le fait que le taux de variation moyen sur un intervalle est une mesure de la variation d'une variable dépendante par rapport à celle de la variable indépendante sur cet intervalle et que, graphiquement, cette mesure est la pente d'un segment de droite.

Durée (h)	T (°C)
0,0	22.0
0,5	20,3
1,5	17,5
2,75	14,5
3,5	12,9
5,25	9,9

Définitions et calculs

En temps normal, la température intérieure de votre logement est maintenue à 22 °C. Au cours d'une panne d'électricité à la mi-janvier, vous avez relevé la température à l'intérieur de la maison à différents moments à partir du début de la panne. Les valeurs obtenues sont consignées dans le tableau ci-contre.

En observant ces données, on peut se demander si la diminution de température est toujours la même ou si elle est plus rapide au début de la panne et moins rapide par la suite. Pour répondre à cette interrogation, on peut déterminer une mesure de l'évolution de la température par rapport au temps écoulé durant un intervalle de temps particulier. Il suffit de prendre la différence de température entre la fin et le début de l'intervalle et de diviser cette différence par le temps écoulé. Ainsi, durant la première demi-heure, on a :

TauxMoyen01

$$\frac{20,3-22,0}{0,5-0} \approx -3,4 \text{ °C/h}.$$

Cela signifie qu'au début de la panne, la température a tendance à diminuer de 3,4 °C par heure.

Considérons maintenant l'intervalle de temps [2,75; 3,5]. On obtient alors :

$$\frac{12,9-14,5}{3,5-2,75} \approx -2,1 \text{ °C/h}.$$

Cela signifie que durant l'intervalle de temps [2,75; 3,5], la température a tendance à diminuer de 2,1 °C par heure.

REMARQUE
Le taux de variation moyen d'une variable par rapport à l'autre véhicule de l'information sur le phénomène. Il décrit un aspect de celui-ci. Pour en faire une analyse complète, le taux de variation moyen n'est pas suffisant.

Effectuons le même calcul pour l'intervalle [3,5; 5,25]. On trouve :

$$\frac{9,9-12,9}{5,25-3,5} \approx -1,7 \text{ °C/h}.$$

Cela signifie que durant l'intervalle de temps [3,5; 5,25], la température a tendance à diminuer de 1,7 °C par heure.

Ces calculs permettent de constater ce qu'une observation superficielle ne laissait pas entrevoir. La diminution de la température ambiante est plus rapide au début de la panne et moins rapide par la suite. De plus, on a une mesure de l'évolution de la température par rapport au temps pour chacun des intervalles considérés.

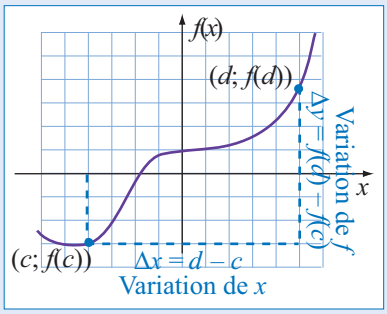
Variation

On appelle **variation** tout changement de la valeur d'une variable. On la note Δx, qui se lit delta x, et qui représente une variation de la variable x. Si la valeur initiale de cette variable est représentée par c et la valeur finale par d, la variation Δx est donnée par :

$$\Delta x = d - c$$

Soit f, une fonction continue sur un intervalle fermé $[c; d]$. La variation Δy de cette fonction dans l'intervalle $[c; d]$ est :

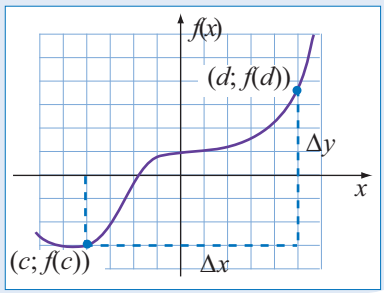
$$\Delta y = f(d) - f(c).$$



Taux de variation moyen sur un intervalle

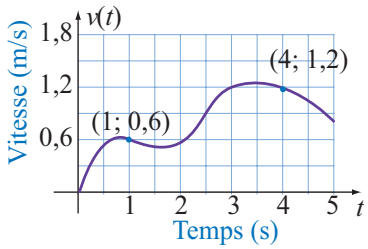
Soit $y = f(x)$, une fonction continue sur un intervalle fermé $[c; d] \subset \text{dom}_f$. On appelle **taux de variation moyen** de f sur l'intervalle $[c; d]$ le rapport :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c;\,d]} = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$



EXEMPLE 1.1.1

Le graphique ci-contre représente la vitesse v d'un mobile en fonction du temps t. Calculer le taux de variation moyen de la vitesse durant l'intervalle [1; 4].



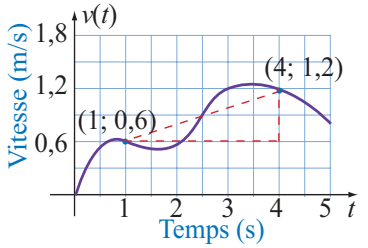
Solution

Le graphique indique que la vitesse à 1 s est de 0,6 m/s et à 4 s, elle est de 1,2 m/s, d'où $\Delta v = v_2 - v_1 = 1{,}2 - 0{,}6 = 0{,}6$ m/s. La vitesse augmente de 0,6 m/s durant cet intervalle de temps. La durée de l'intervalle est

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 4 - 1 = 3 \text{ s}.$$

Le taux de variation moyen $\left.\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|_{[1;4]} = \frac{0{,}6}{3} = 0{,}2\,\frac{\text{m/s}}{\text{s}}$

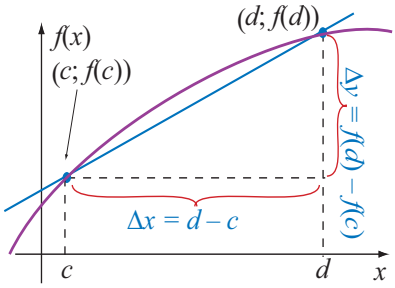
Le taux de variation moyen est positif et signifie que, durant cet intervalle, la vitesse augmente, en moyenne, de 0,2 mètre par seconde à chaque seconde. Le taux de variation de la vitesse par rapport au temps est une accélération.



Puisque le taux de variation moyen peut varier d'un intervalle à l'autre, on indique toujours sur quel intervalle on l'a calculé. Les notations utilisées pour représenter le taux de variation moyen sont :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c;\,d]} = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \text{ ou } \text{TVM}_{[c;\,d]} = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$

Graphiquement, le taux de variation moyen d'une fonction sur un intervalle $[c; d]$ est la **pente** du segment de droite joignant les points $(c; f(c))$ et $(d; f(d))$. Cette droite est appelée la **droite sécante** à la courbe de la fonction f passant par les points $(c; f(c))$ et $(d; f(d))$.



REMARQUE

La variation Δy n'est pas le produit de deux quantités, mais la différence entre la valeur finale et la valeur initiale de la variable sur l'intervalle. Le taux de variation est le rapport de la variation Δy de la variable dépendante à la variation Δx de la variable indépendante.

PROCÉDURE

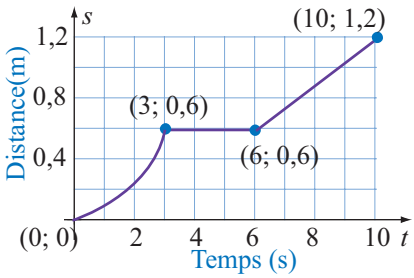
Calcul du taux de variation moyen sur un intervalle

1. Identifier les deux points aux frontières de l'intervalle $(c; f(c))$ et $(d; f(d))$.
2. Calculer la pente du segment de droite passant par ces points.

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c;d]} = \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \text{ ou } \mathrm{TVM}_{[c;d]} = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}.$$

EXEMPLE 1.1.2

Le graphique ci-contre décrit la position $s = f(t)$ en mètres d'un mobile mesurée à partir d'un point fixe en fonction du temps t en secondes.



a) Trouver le taux de variation moyen durant l'intervalle [0; 3]. Quelle est l'interprétation physique de ce taux de variation ?

b) Trouver le taux de variation moyen durant l'intervalle [6; 10].

c) Qu'est-ce qui caractérise le taux de variation moyen dans l'intervalle [6; 10] ?

Solution

a) Le taux de variation moyen durant l'intervalle [0; 3] est le rapport de la variation de position sur la longueur de l'intervalle de temps, ce qui donne :

$$\left.\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|_{[0;\,3]} = \frac{0{,}6-0}{3-0} = 0{,}2 \text{ m/s}.$$

Le taux de variation moyen durant cet intervalle de temps est donc de 0,2 mètre par seconde. Ce taux représente la vitesse moyenne durant cet intervalle de temps.

b) Dans l'intervalle [6; 10], $\left.\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|_{[6;\,10]} = \frac{1{,}2-0{,}6}{10-6} = 0{,}15 \text{ m/s}.$

Le taux de variation moyen est de 0,15 m/s.

c) Dans l'intervalle [6; 10], la fonction est affine. Le taux de variation moyen est le taux de variation réel de la position en fonction du temps.

REMARQUE

Les unités de mesure sont indispensables pour interpréter correctement un taux de variation. Ainsi, dans l'exemple de la mise en situation, si la température était mesurée en degrés Fahrenheit, la valeur numérique du taux de variation serait différente mais les unités de mesure permettraient une interprétation correcte.

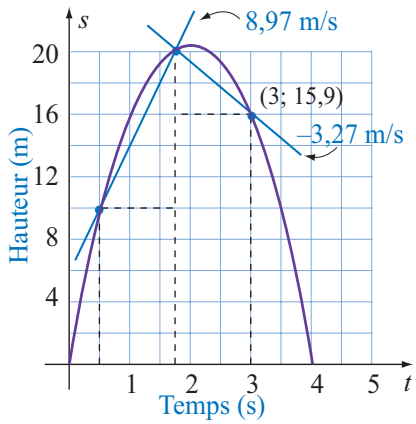
TauxMoyen03

EXEMPLE 1.1.3

On lance une balle verticalement avec une vélocité de 20 m/s. La position de la balle mesurée à partir du sol est décrite par :

$$s = f(t) = 20t - 4{,}9t^2 \text{ mètres}$$

Déterminer le taux de variation moyen de s par rapport à t durant les intervalles de temps [0,5; 1,75] et [1,75; 3],t représenter graphiquement.



Solution

Le taux de variation moyen durant l'intervalle [0,5; 1,75] est :

$$\left.\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|_{[0.5;\,1.75]} = \frac{[s(1{,}75)-s(0{,}5)]\text{ m}}{(1{,}75-0{,}5)\text{ s}} = \frac{(19{,}99-8{,}78)\text{ m}}{1{,}25\text{ s}} \approx 8{,}97 \text{ m/s}.$$

La balle s'éloigne du sol de 8,97 mètres par seconde en moyenne durant cet intervalle de temps.

Le taux de variation moyen durant l'intervalle [1,75; 3] est :

$$\left.\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|_{[1{,}75;\,3]} = \frac{\left[s(3)-s(1{,}75)\right]\text{ m}}{(3-1{,}75)\text{ s}} = \frac{(15{,}90-19{,}99)\text{ m}}{1{,}25\text{ s}} = -3{,}27\ \text{m/s}.$$

La balle s'approche du sol de 3,27 mètres par seconde en moyenne durant cet intervalle de temps.

EXEMPLE 1.1.4

Considérant la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - 3x - 4.$$

Calculer le taux de variation moyen de la fonction dans l'intervalle indiqué et interpréter ce résultat.

a) [–4; –2] b) [0; 3] c) [2; 5] d) [0; 6]

Solution

a) Le taux de variation moyen dans l'intervalle [–4; –2] est :

$$\left.\frac{y}{x}\right|_{[-4;-2]} = \frac{f(-2)-f(-4)}{-2-(-4)} = \frac{6-24}{-2+4} = \frac{-18}{2} = -9.$$

Le taux de variation est négatif, cela signifie qu'en moyenne, la fonction est décroissante dans l'intervalle [–4; –2]. Dans cet intervalle, la variable dépendante diminue en moyenne de 9 unités pour chaque augmentation d'une unité de la variable indépendante.

b) Le taux de variation moyen dans l'intervalle [0; 3] est :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[0;3]} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{-4-(-4)}{3} = \frac{0}{3} = 0.$$

Le taux de variation moyen est nul, cela laisse supposer que la fonction est constante dans l'intervalle [0; 3], ce qui n'est pas tout à fait exact.

c) Le taux de variation moyen dans l'intervalle [2; 5] est :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[2;5]} = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{6-(-6)}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Le taux de variation moyen est égal à 4, cela signifie qu'en moyenne, la fonction est croissante dans l'intervalle [2; 5]. Dans cet intervalle, la variable dépendante augmente en moyenne de 4 unités pour chaque augmentation d'une unité de la variable indépendante.

d) Le taux de variation moyen dans l'intervalle [0; 6] est :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[0;6]} = \frac{f(6)-f(0)}{6-0} = \frac{14-(-4)}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

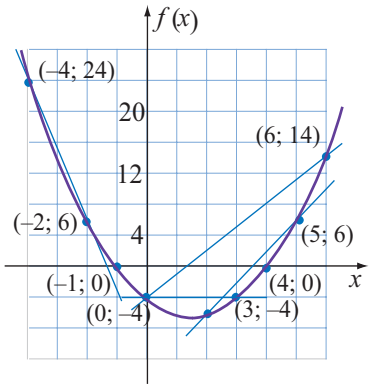
Le taux de variation moyen est égal à 3, cela signifie qu'en moyenne, la fonction est croissante dans l'intervalle [0; 6]. Dans cet intervalle, la variable dépendante augmente en moyenne de 3 unités pour chaque augmentation d'une unité de la variable indépendante.

TauxMoyen04

REMARQUE

Le taux de variation moyen sur un intervalle est la pente d'un segment de droite. Pour le calculer, il suffit donc de déterminer les deux points sur la courbe qui représente *f* aux frontières de cet intervalle et de calculer la pente de la droite sécante passant par ces deux points.

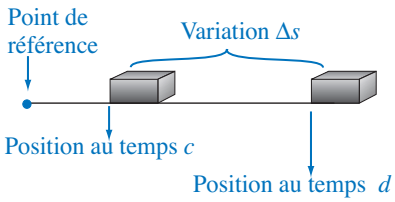
Lorsque le graphique de la fonction est une droite (modèle affine), le taux de variation de *f* par rapport à *x* est le taux de variation réel et non pas un taux de variation moyen.



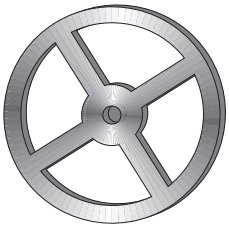
REMARQUE

Le graphique de la fonction permet de constater que le taux de variation moyen peut être trompeur. La pente de la sécante passant par les extrémités de l'intervalle donne un comportement moyen, mais la fonction peut évoluer de diverses façons dans l'intervalle.

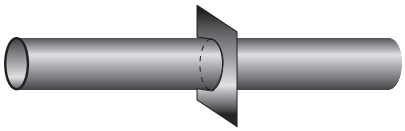
TauxMoyen05



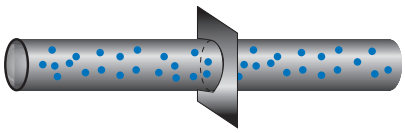
REMARQUE
La vitesse angulaire est donnée en radians par seconde (rad/s) et l'accélération angulaire en radians par seconde par seconde (rad/s^2).



REMARQUE
Le débit moyen est le rapport du volume de liquide traversant un plan de coupe de la conduite, sur l'intervalle de temps considéré.



REMARQUE
La mesure de l'intensité du courant (A) est la quantité de charge traversant une coupe du conducteur par unité de temps. La mesure de la charge est le produit de la charge d'un électron par le nombre d'électrons traversant ce plan imaginaire par unité de temps. La charge d'un électron est mesurée en coulombs; elle est $1{,}6021 \times 10^{-19}$ C.



Taux de variation , grandeurs physiques

Certaines grandeurs physiques représentent des taux de variation et, pour bien interpréter les résultats des calculs concernant ces taux, il faut toujours écrire les unités de mesure. Les principaux taux que nous rencontrerons dans le présent ouvrage sont les suivants :

- la **vitesse moyenne** durant un intervalle de temps [c; d] est le taux de variation de la position par rapport au temps durant cet intervalle. Elle est mesurée en mètres par seconde (m/s);

$$v_{moy} = \left.\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|_{[c;d]} = \frac{(\text{position au temps } d \ - \ \text{position au temps } c)}{(d-c)}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

  Par convention, la vitesse est positive si on s'éloigne du point de référence et négative si on s'en approche.
  La **vitesse angulaire** moyenne d'une roue est donnée en radians par seconde (rad/s). On la représente par la lettre grecque ω (omega).
  La **fréquence de rotation** correspond au nombre de rotations par unité de temps. Elle est mesurée en révolutions par minute (r/min) ou par seconde (r/s).
- l'**accélération moyenne** durant un intervalle de temps [c; d] est le taux de variation de la vitesse par rapport au temps. L'accélération est mesurée en mètres par seconde par seconde (m/s^2);

$$a_{moy} = \left.\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|_{[c;d]} = \frac{(\text{vitesse au temps } d \ - \text{vitesse au temps } c)}{(d-c)}\,\frac{\text{m/s}}{\text{s}}.$$

  L'**accélération angulaire** moyenne d'une roue est en radians par seconde par seconde (rad/s^2). On la représente par la lettre grecque α (alpha).
- le **débit moyen** durant un intervalle de temps [c; d] est le taux de variation du volume de liquide par rapport au temps. Il est mesuré en mètres cubes par seconde (m^3/s) ou en litres par seconde (L/s);

$$D_{moy} = \left.\frac{\Delta V}{\Delta t}\right|_{[c;d]} = \frac{(\text{volume au temps } d - \text{volume au temps } c)}{(d-c)}\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

  La relation entre les unités de mesure est 1 m^3 = 1000 L.
  Le débit est interprété physiquement comme le volume de liquide qui traverse un plan imaginaire coupant la conduite par unité de temps. De plus,

$$D(t) = Av,$$

  où A est l'aire d'une coupe de la conduite (m^2) et v est la vitesse d'écoulement du fluide dans la conduite (m/s).
- le **courant moyen** durant un intervalle de temps [c; d] est le taux de variation de la charge par rapport au temps. Il est mesuré en coulombs par seconde (C/s) ou en ampères (A). La relation entre les unités de mesure est 1 C/s = 1 A;

$$i_{moy} = \left.\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right|_{[c;d]} = \frac{(\text{charge au temps } d \ - \ \text{charge au temps } c)}{(d-c)}\,\frac{\text{C}}{\text{s}}.$$

- la **puissance moyenne** durant un intervalle de temps $[c; d]$ est le taux de variation de l'énergie par rapport au temps durant cet intervalle ou le taux de variation du travail effectué par rapport au temps. Elle est mesurée en joules par seconde (J/s) ou en watts (W). Entre les unités, on a la relation 1 W = 1 J/s;

$$P_{moy} = \left.\frac{\Delta E}{\Delta t}\right|_{[c;d]} = \frac{(\text{énergie au temps } d - \text{énergie au temps } c)}{(d-c)}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

- l'énergie se manifeste sous diverses formes :
  L'**énergie potentielle** est l'énergie que possède un système du fait de l'arrangement particulier de ses composantes. Quand on comprime ou allonge un ressort, il faut effectuer un travail qui est emmagasiné par le système sous forme d'énergie potentielle. Celle-ci est égale au travail effectué pour comprimer ou allonger le ressort et dépend, entre autres, de la constante de rappel du ressort.
  L'énergie potentielle gravitationnelle, notée E_P, est l'énergie que confère à un corps sa position dans un champ de gravitation. Elle est donnée par :

$$E_P = mgh,$$

  où m est la masse du corps (kg), g est la constante gravitationnelle (9,81 m/s^2) et h est la hauteur en mètres (m), et où l'énergie potentielle est en joules (J). L'énergie potentielle varie lorsque la hauteur varie. Lors d'une chute par exemple, on peut avoir à déterminer le taux de variation de l'énergie potentielle par rapport à la hauteur. De même, lorsqu'un ressort se détend, son énergie potentielle varie.
  L'**énergie cinétique**, notée E_C, est l'énergie que possède un corps en mouvement. Elle est donnée par :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2,$$

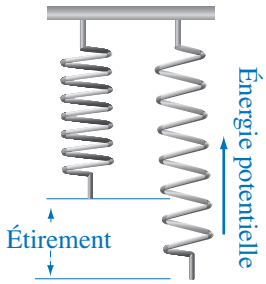
  où m est la masse du corps (kg), v est la vitesse (m/s), et où l'énergie cinétique est en joules (J).

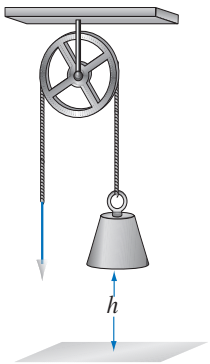
  Lorsque la vitesse d'un corps varie, l'énergie cinétique varie également et on peut avoir à déterminer le taux de variation de l'énergie par rapport à la vitesse v.
- la **vitesse d'une réaction chimique** durant un intervalle de temps $[c; d]$ est le taux de variation de la concentration (mol/L) d'un réactif ou d'un produit par unité de temps (s).

$$v_{moy} = \left.\frac{\Delta C}{\Delta t}\right|_{[c;d]} = \frac{(C \text{ au temps } d - C \text{ au temps } c)}{(d-c)}\,\frac{\text{mol/L}}{\text{s}}.$$

- le **taux de croissance** d'une population, en biologie comme dans les sciences humaines, est le taux de variation de la population par rapport à celle-ci.

REMARQUE
La puissance caractérise les systèmes. Plus un système peut faire un travail rapidement, plus il est puissant.





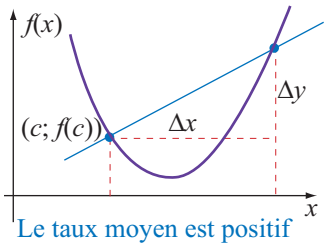
REMARQUE
Durant la chute d'un corps, l'énergie potentielle de celui-ci se transforme en énergie cinétique.

REMARQUE
La vitesse d'une réaction est toujours donnée positivement. Le taux de variation d'un produit est la vitesse de la réaction car la concentration du produit est croissante. Le taux de variation d'un réactif est la vitesse de réaction affectée d'un signe moins, car la concentration d'un réactif est décroissante.

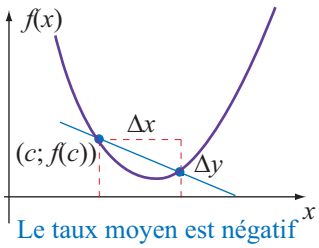
Taux de variation ponctuel

TauxPonctuel01

Le taux de variation moyen sur un intervalle donne une information qui peut nous induire en erreur lorsque vient le temps de l'interpréter, comme on a pu le constater dans les exemples qui précèdent. Pour obtenir une meilleure fiabilité, on a recours au taux de variation ponctuel. Voyons de quoi il s'agit.



Le taux moyen est positif



Le taux moyen est négatif

Dans les figures ci-contre, on a considéré un point $(c; f(c))$ et un intervalle de largeur Δx. Dans la figure du haut, le taux de variation moyen est positif alors que dans la figure du bas, il est négatif. On constate facilement que pour avoir une meilleure information, il est préférable de considérer de petits intervalles pour calculer un taux moyen.

Dans le prochain exemple, nous allons analyser le comportement du taux de variation moyen au voisinage d'un point d'abscisse c. Pour ce faire, nous allons calculer le taux de variation moyen dans des intervalles emboîtés au voisinage de c. Nous aurons besoin d'une notation adaptée à cette démarche.

L'intervalle sera noté $[c; c+\Delta x]$ au lieu de $[c; d]$, où $\Delta x = d - c$. Le taux de variation moyen d'une fonction f sera noté :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c;c+\Delta x]} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

ou

TauxPonctuel02

$$\text{TVM}_{[c;c+\Delta x]} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Dans cette notation, Δx peut être positif ou négatif, ce qui signifie que l'intervalle peut être à droite ($\Delta x > 0$) ou à gauche ($\Delta x < 0$) de c.

Nous allons tenter d'estimer un taux de variation ponctuel en calculant le taux de variation moyen sur un intervalle $[c; c + \Delta x]$ en donnant à Δx des valeurs de plus en plus petites pour voir s'il se dégage une tendance des valeurs calculées.

EXEMPLE 1.1.5

On lance une balle verticalement avec une vélocité de 49 m/s. La position de la balle mesurée à partir du sol est décrite par :

$$s(t) = 49t - 4{,}9t^2 \text{ m}$$

Après avoir calculé le taux de variation moyen sur des intervalles de plus en plus petits à gauche et à droite de 2, estimer le taux de variation ponctuel de la position s au temps $t = 2$ s et représenter graphiquement ce taux de variation.

Solution

Nous allons calculer le taux de variation moyen sur une suite d'intervalles de plus en plus petits à gauche et à droite de 2, de façon à voir la tendance qui se dégage des valeurs obtenues.

Pour $\Delta t = -0{,}5$, l'intervalle est [2; 1,5], ce qui donne :

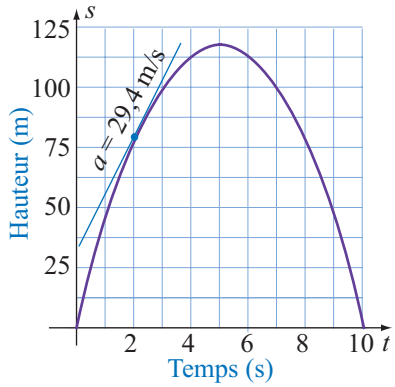
$$\text{TVM}_{[2;1,5]} = \frac{s(1{,}5)-s(2)}{-0{,}5} = \frac{62{,}475-78{,}4}{-0{,}5}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 31{,}85\ \text{m/s}.$$

En calculant le taux de variation moyen sur des intervalles emboîtés de plus en plus petits à gauche et à droite de 2, on obtient les résultats compilés dans le tableau ci-contre.

INTERVALLE			
à gauche		à droite	
Δt	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	Δt	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
–0,5	31,85 m/s	0,5	26,95 m/s
–0,1	29,89 m/s	0,1	28,91 m/s
–0,01	29,449 m/s	0,01	29,351 m/s

Le taux de variation de la position (hauteur) par rapport au temps est une vitesse et ces différents calculs nous permettent de constater que la vitesse à l'instant $t = 2$ s est comprise entre 29,35 m/s et 29,45 m/s. En supposant que s décrit un phénomène continu, on peut considérer 29,4 m/s comme valeur approchée de la vitesse. Graphiquement, ce taux de variation est la pente de la tangente au point (2; 78,4) du graphique décrivant la position en fonction du temps.

On constate que, plus l'intervalle considéré est petit, plus le renseignement véhiculé par le taux de variation moyen est précis. C'est-à-dire, plus la variation Δx est proche de 0, plus le renseignement fourni par le taux de variation est précis.



Interprétation graphique du taux ponctuel

Un moment de réflexion pour nous assurer que la définition qui précède donne bien ce que nous cherchons.

On sait déjà que le rapport :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c;c]} = \frac{f(c)-f(c)}{0} = \frac{0}{0}.$$

représente le taux de variation moyen de la fonction f sur l'intervalle $[c; c+\Delta x]$ et que, graphiquement, ce taux est la pente de la sécante passant par le point $(c; f(c))$ et par le point $(c+\Delta x; f(c+\Delta x))$. C'est ce qu'illustre la figure 1 ci-contre.

Pour interpréter géométriquement la façon dont nous avons procédé pour estimer le TVP dans l'exemple précédent, on doit se représenter ce qui se passe lorsque Δx tend vers 0. Pour y parvenir, désignons par P le point fixe $(c; f(c))$ et par Q le point variable $(c+\Delta x; f(c+\Delta x))$ et considérons que le point Q peut se déplacer sur la courbe représentant la fonction.

Les figures 2 et 3 permettent de constater que si Δx s'approche de 0, le point Q s'approche du point P sur la courbe. De plus, la sécante passant par P et Q pivote autour du point P lorsque le point Q s'approche du point P.

Lorsque P et Q se confondent en un seul point, la sécante PQ devient la tangente à la courbe au point P. C'est ce qu'illustre la figure 4 page suivante.

On constate que lorsque le point Q s'approche du point P, c'est-à-dire lorsque Δx s'approche de 0, le rapport :

REMARQUE

Lorsque la variable indépendante est le temps t, le taux de variation ponctuel sera appelé **taux de variation instantané**. Dans l'exemple 1.3.1, le taux de variation obtenu est un taux de variation instantané. C'est la **vitesse instantanée** de la balle à 2 s. Cette vitesse change continuellement entre le moment où la balle est lancée et le moment où elle retombe au sol.

TauxPonctuel03

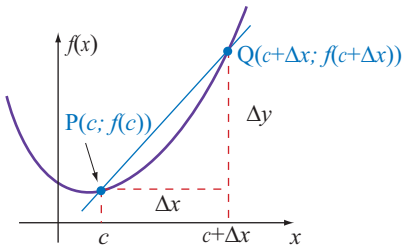


Figure 1

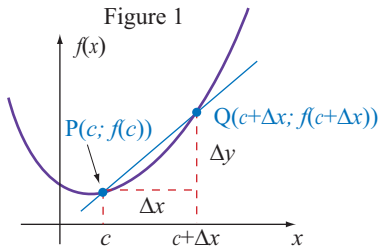


Figure 2

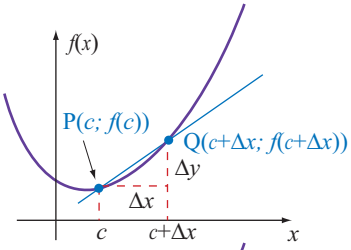


Figure 3

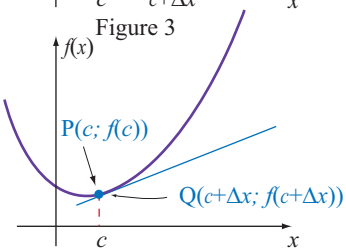


Figure 4

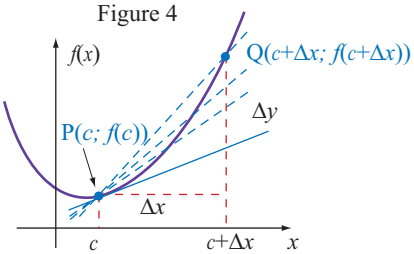


Figure 5

$$\frac{f(c)-f(c+\Delta x)}{\Delta x}$$

qui donne la pente de la sécante PQ s'approche de la pente de la tangente au point P. En d'autres mots, lorsque la largeur de l'intervalle diminue, la valeur du TVM s'approche de la valeur du TVP.

La figure 5 ci-contre résume le raisonnement qui précède. Les obliques pointillées représentent les sécantes pour différentes positions du point Q. Lorsque le point Q s'approche du point P, les sécantes pivotent autour du point P et à la limite, la sécante devient la tangente.

Cette interprétation géométrique du taux de variation ponctuel justifie la procédure utilisée à l'exemple précédent.

Pourquoi ne pas calculer directement le taux de variation ponctuel? En posant $\Delta x = 0$ dans :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c;c+\Delta x]} = \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x},$$

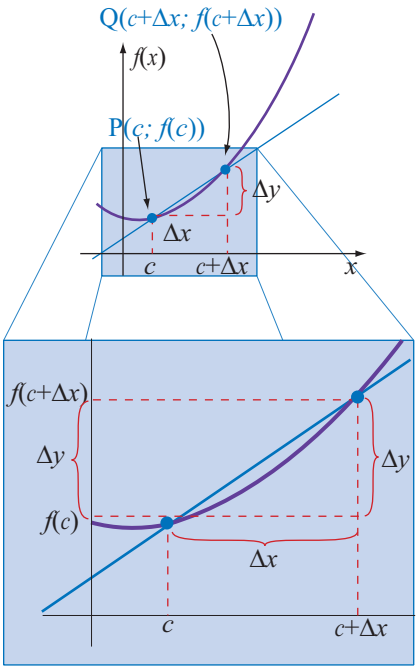
on obtient : $$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c;c]} = \frac{f(c)-f(c)}{0} = \frac{0}{0}.$$

Or, la division par 0 est impossible. Notre seul recours est donc, actuellement, la procédure suivie à l'exemple 1.3.1. Cette discussion permet de constater que le taux de variation ponctuel en un point d'abscisse c est la pente de la tangente au point $(c; f(c))$.

REMARQUE

On ne peut trouver directement la pente de la tangente en un point, car pour calculer la pente d'une droite il faut connaître deux points et seul le point de tangence est connu.

Taux ponctuel, valeur limite



Taux de variation ponctuel

Soit f, une fonction définie par $y = f(x)$ et $(c; f(c))$, un point du graphique de cette fonction, le **taux de variation ponctuel** de f au point d'abscisse c est noté :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_c \text{ et défini par } \left.\frac{dy}{dx}\right|_c = \lim_{\Delta x \to 0} \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c,c+\Delta x]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

Dans la définition qui précède, l'expression :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

signifie : la limite lorsque Δx s'approche de 0 du rapport :

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

Ce rapport représente le taux de variation moyen dans l'intervalle $[c; c+\Delta x]$. On constate facilement en regardant le graphique ci-contre que Δy tend vers 0 lorsque Δx tend vers 0 et l'expression :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

donne 0/0. On dit alors que l'on obtient une limite sous une **forme indéterminée**. Cependant, il nous est possible d'estimer le taux ponctuel en calculant le taux de variation moyen sur des intervalles emboîtés et analyser les valeurs obtenues par calcul pour en dégager la tendance.

REMARQUE
Cette démarche d'estimation du taux ponctuel est valide pour une fonction dont la courbe est continue et lisse au voisinage de $(c; f(c))$. Cependant, on peut par des calculs successifs étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'une valeur particulière qui peut ne pas faire partie du domaine. On considère alors des valeurs de plus en plus proches de la valeur particulière et on en calcule l'image pour détecter le comportement de la fonction dans ce voisinage.

PROCÉDURE

Estimation numérique du taux de variation ponctuel

1. Calculer le taux de variation moyen sur une suite d'intervalles de largeur décroissante à gauche et à droite de la valeur considérée.
2. Estimer la valeur limite vers laquelle tendent les suites de nombres représentant les taux de variation moyens.
3. Interpréter le résultat selon le contexte en tenant compte des unités de mesure.

EXEMPLE 1.1.6

La puissance dissipée dans une résistance de 2 Ω est décrite en fonction du courant par $P = 2I^2$ où P est en watts (W) et I est en ampères (A). Trouver le taux de variation ponctuel de cette fonction lorsque $I = 3$ A.

TauxPonctuel06

Solution

Pour estimer le taux de variation ponctuel, nous allons calculer le taux de variation moyen sur une suite d'intervalles de plus en plus petits à gauche et à droite de 3, de façon à voir la tendance qui se dégage des valeurs obtenues.

Pour $\Delta I = 0{,}5$, l'intervalle est [3; 3,5], ce qui donne :

$$\left.\frac{\Delta P}{\Delta I}\right|_{[3;3{,}5]} = \frac{P(3{,}5)-P(3)}{0{,}5} = \frac{24{,}5-18}{0{,}5} = 13 \text{ W/A}.$$

En calculant le taux de variation moyen sur des intervalles emboîtés de plus en plus petits à gauche et à droite de 3, on obtient les résultats compilés dans le tableau ci-contre.

INTERVALLE			
à gauche		à droite	
ΔI	$\frac{\Delta P}{\Delta I}$	ΔI	$\frac{\Delta P}{\Delta I}$
–0,5	11	0,5	13
–0,1	11,8	0,1	12,2
–0,01	11,98	0,01	12,02

Ces calculs permettent d'estimer que le taux de variation ponctuel est :

$$\left.\frac{dP}{dI}\right|_3 \approx 12 \text{ W/A}.$$

Cela signifie que pour un courant de 3 A, la puissance tend à augmenter de 12 W pour chaque augmentation du courant de 1 A.

REMARQUE
Les calculs effectués dans ce tableau visent à connaître le comportement de la fonction au voisinage de la valeur considérée pour pouvoir estimer la limite lorsqu'elle existe. Tant que l'on ne parvient pas à détecter correctement le comportement, il faut effectuer d'autres calculs.

Dans certaines situations, on doit pouvoir estimer le taux de variation à partir de la représentation graphique du phénomène car c'est parfois la seule description disponible de celui-ci. Il faut alors tracer la tangente et estimer sa pente en tenant compte de la graduation des axes et des unités de mesure.

REMARQUE

Cette procédure donne simplement une estimation du taux de variation, il ne faut pas l'oublier. De plus, lorsqu'on choisit deux points sur la tangente, il est préférable qu'ils soient assez éloignés l'un de l'autre pour obtenir une meilleure précision.

PROCÉDURE

Estimation graphique du taux de variation ponctuel

1. Tracer la tangente à la courbe au point indiqué.
2. Évaluer la variation de chacune des variables en tenant compte de la graduation et des unités de mesure.
3. Calculer le rapport des variations (taux de variation).
4. Interpréter le résultat selon le contexte.

EXEMPLE 1.1.7

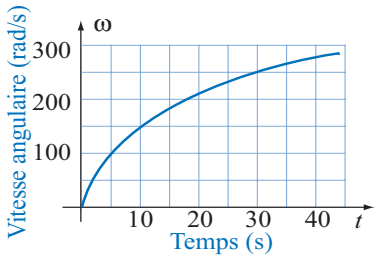
Le graphique ci-contre représente la vitesse de la roue d'inertie d'un appareil t secondes après la mise sous tension du moteur.

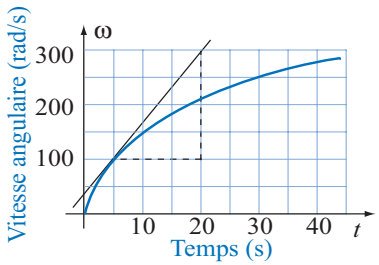
a) Évaluer graphiquement le taux de variation ponctuel de la vitesse angulaire par rapport au temps lorsque $t = 5$ s.

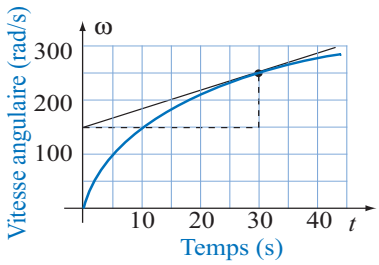
b) Quelle est l'interprétation physique de ce taux de variation?

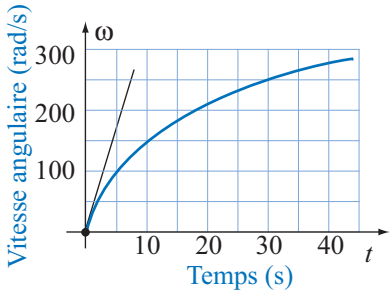
c) Évaluer graphiquement et interpréter le taux de variation ponctuel de la vitesse angulaire par rapport au temps lorsque $t = 30$ s.

d) À quel moment le taux de variation ponctuel est-il maximal ?









Solution

a) En traçant approximativement la tangente à la courbe au point d'abscisse 5, on a la figure ci-contre. En considérant deux points de cette tangente, le quadrillé permet alors d'évaluer la pente de la tangente qui représente le taux de variation ponctuel, soit :

$$\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_5 = \frac{300-100}{20-5}\,\frac{\text{rad/s}}{\text{s}} \approx 13{,}3\ \text{rad/s}^2.$$

b) Ce taux de variation ponctuel est l'accélération de la roue d'inertie à 5 s. À cet instant, la vitesse a tendance à augmenter de 13,3 rad/s à chaque seconde.

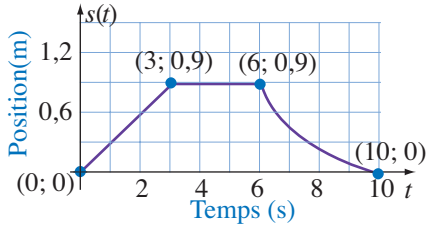
c) En traçant approximativement la tangente à la courbe au point d'abscisse 30, on a la deuxième figure ci-contre. En considérant deux points de cette tangente, le quadrillé permet alors d'évaluer la pente de la tangente qui représente le taux de variation ponctuel, ce qui donne :

$$\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{30} = \frac{250-150}{30-0}\,\frac{\text{rad/s}}{\text{s}} = 3{,}3\ \text{rad/s}^2.$$

d) Le taux de variation ponctuel est maximal lorsque la pente de la tangente à la courbe est la plus abrupte. La représentation graphique nous permet de constater que cela se produit à $t = 0$ s.

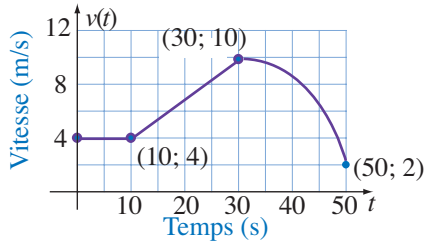
1.2 Exercices

1. Le graphique suivant représente la position s en mètres d'un mobile par rapport à un point fixe en fonction du temps t mesuré en secondes.



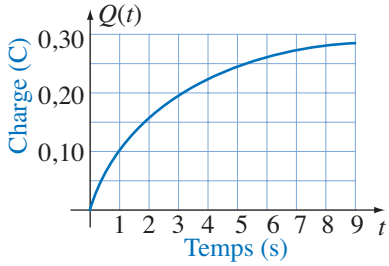
a) Calculer le taux de variation moyen dans l'intervalle [0; 3]. Quelle est la signification physique de ce taux de variation ?
b) Calculer le taux de variation moyen dans l'intervalle [3; 6]. Quelle est la signification physique de ce taux de variation ?
c) Calculer le taux de variation moyen dans l'intervalle [6; 10]. Quelle est la signification physique de ce taux de variation ?
d) Dans quel(s) intervalle(s) la distance est-elle croissante ? décroissante ?
e) Dans quel(s) intervalle(s) la vitesse est-elle constante ?
f) Dans quel(s) intervalle(s) la vitesse est-elle nulle ?

2. Le graphique suivant représente la vitesse en mètres par seconde d'un mobile en fonction du temps t.

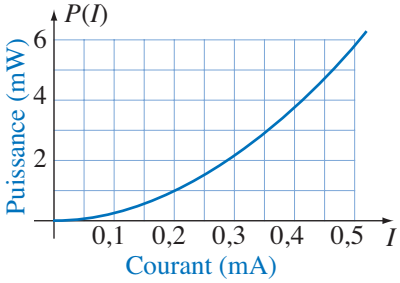


a) Calculer le taux de variation moyen dans l'intervalle [0; 10]. Quelle est la signification physique de ce taux de variation ?
b) Calculer le taux de variation moyen dans l'intervalle [10; 30]. Quelle est la signification physique de ce taux de variation ?
c) Calculer le taux de variation moyen dans l'intervalle [30; 50]. Quelle est la signification physique de ce taux de variation ?
d) Dans quel(s) intervalle(s) de temps la vitesse est-elle constante ?
e) Dans quel(s) intervalle(s) de temps la vitesse est-elle croissante ? décroissante ?
f) Dans quel(s) intervalle(s) de temps l'accélération est-elle constante ? nulle ?

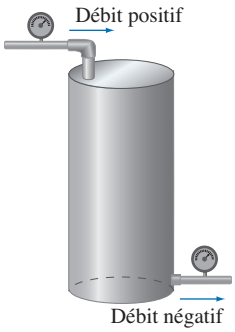
3. Le graphique suivant représente la charge nette en coulombs traversant une section d'un conducteur en fonction du temps mesuré en secondes. Évaluer le taux de variation moyen durant l'intervalle [1; 2]. Que représente ce taux ?



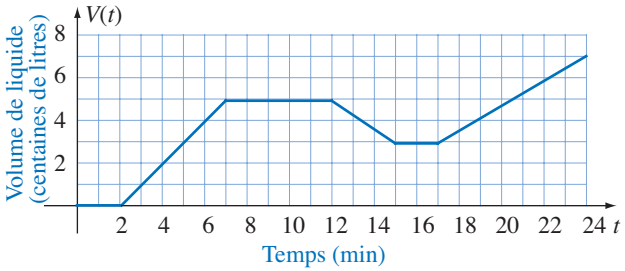
4. Le graphique suivant représente la puissance P en milliwatts dissipée dans une résistance en fonction du courant mesuré en milliampères. Trouver le taux de variation moyen lorsque le courant varie de 0,1 à 0,4 milliampère.



5. Considérons un réservoir servant à entreposer un liquide et doté d'une voie d'écoulement et d'une voie de remplissage. Lorsque le liquide dans le tube se dirige vers le réservoir, le volume de liquide contenu dans le réservoir augmente et il diminue dans le cas contraire. Si le liquide dans le tube ne se déplace pas, le volume de liquide dans le réservoir est constant. On peut décrire l'évolution dans le temps du volume de liquide dans le réservoir à l'aide d'une fonction que nous allons représenter par $V(t)$, où t est le temps. Le déplacement du liquide peut être décrit par une fonction débit $D(t)$



qui est positive lorsque le liquide se déplace en direction du réservoir, et qui est négative dans le cas contraire. La fonction débit est nulle lorsque le liquide ne se déplace pas.



a) Trouver le taux moyen de variation du volume durant les intervalles de temps suivants : [0; 2], [2; 7], [7; 12], [12; 15], [2; 12] et [12; 24].
b) Interpréter géométriquement chacun de ces taux de variation.
c) Représenter graphiquement la fonction $D(t)$.

6. Un projectile est lancé verticalement vers le haut et sa position par rapport au sol est décrite par :

$$h(t) = 96t - 4{,}9t^2 \text{ m}$$

où t est le temps mesuré en secondes.
a) Calculer son taux de variation moyen durant l'intervalle [0; 2,5]. Quelle est l'interprétation physique de ce taux de variation ?
b) Calculer son taux de variation moyen durant l'intervalle [3; 6]. Quelle est l'interprétation physique de ce taux de variation ?
c) Calculer son taux de variation moyen durant l'intervalle [10; 15]. Quelle est l'interprétation physique de ce taux de variation ?

7. Pour chacune des fonctions suivantes, utiliser le taux de variation moyen de la fonction sur l'intervalle indiqué pour déterminer si la fonction est croissante ou décroissante dans l'intervalle.
a) $f(x) = 2x - 3$ dans l'intervalle [0; 2]
b) $f(x) = x^2 - 5$ dans l'intervalle [1; 4]
c) $f(x) = x^2 - 5$ dans l'intervalle [–2; 1]
d) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ dans l'intervalle [–1; 1]
e) $f(x) = 1/x$ dans l'intervalle [1; 4]
f) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ dans l'intervalle [–2; 0]

8. Soit la fonction $f(x) = 1/x$. Le taux moyen de variation est-il défini dans l'intervalle [–1; 1] ? Expliquer.

9. Soit f une fonction dont le taux de variation moyen est nul dans un intervalle [c; d]. Est-ce que cela signifie obligatoirement que la fonction est constante dans cet intervalle ? Justifier votre réponse en donnant un graphique de fonction.

10. Soit f une fonction dont le taux de variation moyen est positif dans un intervalle [c; d]. Est-ce que cela signifie obligatoirement que la fonction est toujours croissante dans cet intervalle ? Justifier votre réponse en donnant un graphique de fonction.

11. Soit f une fonction dont le taux de variation moyen est négatif dans un intervalle [c; d]. Est-ce que cela signifie obligatoirement que la fonction est toujours décroissante dans cet intervalle ? Justifier votre réponse en donnant un graphique de fonction.

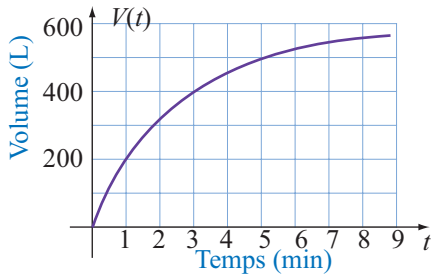
12. Esquisser le graphique d'une fonction dont le taux de variation moyen est nul sur un intervalle [c; d] et dont le taux de variation moyen est positif sur la première moitié de cet intervalle et négatif sur la deuxième moitié de l'intervalle.

13. Un patient qui vient d'être opéré est branché à un moniteur qui enregistre son nombre de battements cardiaques depuis l'opération.

Temps (min)	Nombre de battements
30	2 420
35	2 800
40	3 140
45	3 440
50	3 720
55	4 010
60	4 280

a) À l'aide des données du tableau déterminer le rythme cardiaque moyen du patient durant l'intervalle [30; 60].
b) Le rythme cardiaque moyen du patient est-il stable durant cet intervalle de temps ? Expliquer.

14. Le graphique suivant représente le volume de liquide dans un réservoir en fonction du temps mesuré en minutes.



a) Évaluer graphiquement le taux de variation ponctuel lorsque $t = 1$ min.
b) Quelle est l'interprétation physique de ce taux de variation ?
c) Évaluer graphiquement le taux de variation ponctuel lorsque $t = 5$ min.
d) À quel(s) moment(s) le taux de variation ponctuel est-il minimal ? maximal ?

15. On lance une balle verticalement avec une vélocité de 64 m/s. La hauteur de la balle mesurée à partir du sol est décrite par :

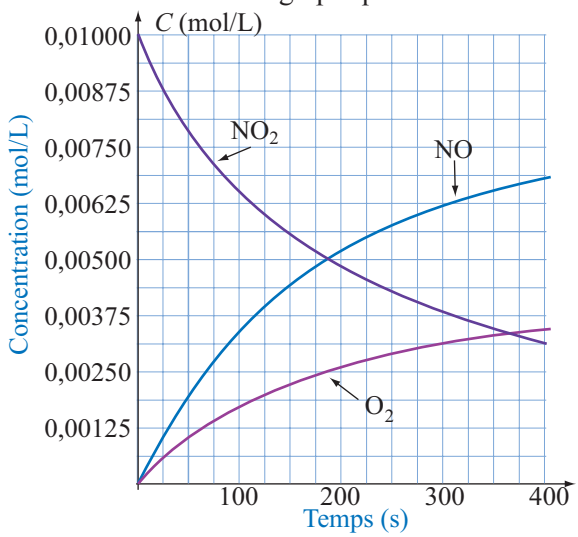
$$s(t) = 64t - 4{,}9t^2 \text{ mètres.}$$

a) Calculer le taux de variation moyen de la hauteur lorsque $t = 2$ s et $\Delta t = 0{,}5$ s.
b) Calculer le taux de variation moyen de la hauteur lorsque $t = 2$ s et $\Delta t = -0{,}5$ s.
c) Estimer le taux de variation ponctuel de la hauteur au temps $t = 2$ s. Quelle est la signification physique de ce taux de variation?
d) Estimer le taux de variation ponctuel de la hauteur au temps $t = 8$ s. Quelle est la signification physique de ce taux de variation?

16. On a réalisé une expérience sur la décomposition du dioxyde d'azote gazeux en oxyde nitrique et en oxygène, décomposition décrite par :

$$2NO_2(g) \rightarrow 2NO(g) + O_2(g)$$

On a pris un ballon renfermant du dioxyde d'azote à 300 °C et à mesurer à intervalles réguliers les concentrations (mol/L) de dioxyde d'azote, d'oxyde nitrique et d'oxygène pendant la décomposition du dioxyde d'azote. Les résultats de ces mesures sont donnés graphiquement



a) Estimer graphiquement le taux de variation de la concentration de dioxyde d'azote au temps $t = 0$ s (ce taux de variation est appelé **vitesse de réaction**).
b) Estimer graphiquement le taux de variation de la concentration de dioxyde d'azote au temps $t = 50$ s.
c) Estimer graphiquement le taux de variation de la concentration de dioxyde d'azote au temps $t = 100$ s.
d) Estimer graphiquement le taux de variation de la concentration de dioxyde d'azote au temps $t = 200$ s.

17. Faire l'analyse du comportement de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

au voisinage de $x = 4$ en complétant le tableau suivant :

ESTIMATION PAR INTERVALLES EMBOÎTÉS			
à gauche		à droite	
x	$\frac{x^2 - 16}{x - 4}$	x	$\frac{x^2 - 16}{x - 4}$
3,5		4,5	
3,9		4,1	
3,99		4,01	

a) La fonction est-elle définie à $x = 4$?
Lorsque x s'approche d'une valeur particulière, on dit que la limite de la fonction existe si les images tendent vers la même valeur par la droite et par la gauche.
b) La limite lorsque x s'approche de 4 de la fonction f existe-t-elle? Si oui, compléter :

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} =$$

18 On lance une balle verticalement avec une vélocité de 40 m/s. La hauteur de la balle mesurée à partir du sol est décrite par $s(t) = 40t - 4{,}9t^2$ m.
a) Estimer le taux de variation instantané de s par rapport à t à 2 secondes. Donner l'interprétation physique de ce taux de variation.
b) Estimer le taux de variation instantané de s par rapport à t à 5 secondes. Donner l'interprétation physique de ce taux de variation.

1.3 Limite et taux ponctuel

Dans cette section, nous présentons d'abord la notion de limite que nous utilisons par la suite pour évaluer le taux de variation ponctuel d'une fonction dont la règle de correspondance est connue.

Notion intuitive de limite

Limites02

Pour introduire intuitivement cette notion, analysons le comportement de quelques fonctions au voisinage d'une valeur qui ne fait pas partie de son domaine.

EXEMPLE 1.3.1

Déterminer par des calculs successifs le comportement des fonctions au voisinage de $x = 2$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{|x^2-4|}{x-2}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Solution

a) Remarquons tout d'abord que $f(2)$ n'existe pas, le domaine de la fonction est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. En calculant l'image pour des valeurs dans le voisinage de $x = 2$, on obtient les données du premier tableau ci-contre. On décrit le comportement de la fonction au voisinage de 2 par

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty.$$

Puisque les images calculées deviennent de plus en plus grandes négativement à gauche et de plus en plus grandes positivement à droite, on dit que la limite n'existe pas.

INTERVALLE			
à gauche		à droite	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,5	–2	2,5	2
1,9	–10	2,1	10
1,99	–100	2,01	100
1,999	–1000	2,001	1000

REMARQUE

L'infini n'est pas un nombre et le symbole ∞ signifie que les valeurs ne sont pas bornées et qu'il n'y a pas de limite à la suite des images.

b) Le domaine de cette fonction est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. On analyse le comportement de la fonction au voisinage de $x = 2$ (second tableau). On décrit ce comportement en écrivant

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x^2-4|}{x-2} = -4 \text{ et } \lim_{x\to 2^+} \frac{|x^2-4|}{x-2} = 4.$$

Puisque les images calculées ne tendent pas vers la même valeur à gauche et à droite, on dit que la limite n'existe pas.

INTERVALLE			
à gauche		à droite	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,5	–3,5	2,5	4,5
1,9	–3,9	2,1	4,1
1,99	–3,99	2,01	4,01
1,999	–3,999	2,001	4,001

c) Le domaine de cette fonction est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. On analyse le comportement de la fonction au voisinage de $x = 2$ (troisième tableau). On décrit ce comportement en écrivant

$$\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = 4 \text{ et } \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = 4.$$

Puisque les images calculées tendent vers la même valeur à gauche et à droite, on dira que la limite existe et on écrira simplement :

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = 4.$$

INTERVALLE			
à gauche		à droite	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,5	3,5	2,5	4,5
1,9	3,9	2,1	4,1
1,99	3,99	2,01	4,01
1,999	3,999	2,001	4,001

Pour éviter toute confusion, précisons le sens du symbolisme utilisé.

COMPORTEMENT D'UNE FONCTION

Description symbolique

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$	signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de c par la gauche, les images de x par la fonction s'approchent de plus en plus de L. On dit que L est la **limite à gauche** des images lorsque x s'approche de c.
$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$	signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de c par la droite, les images de x par la fonction s'approchent de plus en plus de L. On dit que L est la **limite à droite** des images lorsque x s'approche de c.
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$	signifie que la limite à gauche est égale à la limite à droite et que celle-ci est L.
$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty$	signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de c par la droite, les images croissent sans limite. On dit alors que la **limite à droite** de f lorsque $x \to c$ est l'infini. Cela revient à dire symboliquement qu'il n'y a pas de limite.
$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \infty$	signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de c par la droite, les images croissent sans limite. On dit alors que la **limite à gauche** de f lorsque $x \to c$ est l'infini. Cela revient à dire symboliquement qu'il n'y a pas de limite.

REMARQUE

Dans cette notation symbolique, le signe = n'a pas la même signification que dans l'algèbre traditionnelle. Ce symbole a ici une connotation dynamique en référence à un processus infini. Ainsi, la première expression indique que lorsque x s'approche de c par la gauche, les images s'approchent de plus en plus de L.

Existence de la limite

Soit f, une fonction. On dit que la limite de f lorsque x tend vers c **existe** si et seulement si :

1. La limite des images à gauche de c est égale à la limite des images à droite de c;
2. Cette limite, L, est un nombre réel.

Dans un tel cas, on écrit simplement :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Énonçons, sans les démontrer les propriétés des limites. À quelques occasions, nous aurons à faire référence à l'une ou l'autre de ces propriétés pour justifier une étape d'un raisonnement ou de la transformation d'une expression algébrique.

Limites02

NOTE

Le concept de limite est présent en mathématiques depuis l'Antiquité sans qu'il soit clairement défini. On le retrouve dans les paradoxes de Zénon (NH Zénon01, Zénon02), dans le postulat d'Eudoxe (NH Eudoxe01) et dans les *Éléments* d'Euclide. Ce n'est cependant que très récemment que ce concept a été défini de façon satisfaisante, grâce aux travaux d'Augustin Cauchy (NH Cauchy) et de Karl Weierstrass (NH Weierstrass).

PROPRIÉTÉS DES LIMITES

Limites et opérations

Si L, M, c et k sont des nombres réels et que :

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \text{ et } \lim_{x\to c} g(x) = M$$

alors, on a les propriétés suivantes :

a) Limite d'une somme de fonctions

La limite de la somme de deux fonctions est égale à la somme des limites de ces deux fonctions.

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M.$$

b) Limite d'une différence de fonctions

La limite de la différence de deux fonctions est égale à la différence des limites de ces deux fonctions.

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M.$$

c) Limite du produit d'une fonction par une constante

La limite du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de la constante par la limite de la fonction.

$$\lim_{x\to c}\left[kf(x)\right] = k\lim_{x\to c} f(x) = kL.$$

d) Limite d'un produit de fonctions

La limite d'un produit de deux fonctions est égale au produit des limites de ces deux fonctions.

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)g(x)\right] = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = LM.$$

e) Limite d'un quotient de fonctions

La limite du quotient de deux fonctions est égale au quotient des limites de ces deux fonctions, à condition que $\lim_{x\to c} g(x)$ soit différente de 0.

$$\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ si } M \neq 0.$$

f) Limite d'une puissance rationnelle d'une fonction

La limite d'une puissance rationnelle d'une fonction est égale à la puissance de la limite, à condition que celle-ci soit un nombre réel.

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^{r/s} = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^{r/s} = L^{r/s},$$

où r et s sont des entiers et $s \neq 0$.

Formes indéterminées

Forme 0/0

En étudiant la limite lorsque x tend vers c d'une fonction rationnelle, on obtient parfois 0/0. On dit alors que la limite est de la forme 0/0. C'est une forme indéterminée, on ne peut connaître la limite en évaluant la fonction à c. Exploitons l'approche numérique pour analyser localement le comportement d'une fonction présentant une indétermination de la forme 0/0.

EXEMPLE 1.3.2

Évaluer $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} \right)$.

Limites04

Solution

Lorsque x s'approche de 2, cette expression donne 0/0. Pour pouvoir visualiser ce qui se passe, considérons la fonction définie par :

$$f(x) = \left(\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \right).$$

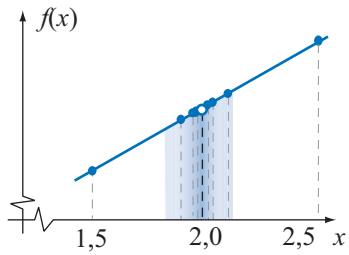
Si on fait une étude numérique du comportement des images de cette fonction lorsque x s'approche de 2 par la gauche et par la droite, on obtient les valeurs consignées dans le tableau ci–contre. On constate que la limite existe lorsque x tend vers 2, puisque la limite à gauche est égale à la limite à droite et que cette limite est un nombre réel. Symboliquement, on a :

$$\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \right) = 5 \text{ et } \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \right) = 5.$$

L'image par la fonction n'est pas définie à 2, mais la limite existe lorsque x tend vers 2. On écrit donc :

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \right) = 5.$$

Analyse du comportement			
à gauche		à droite	
x	$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$	x	$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$
1,5	4,5	2,5	5,5
1,9	4,9	2,1	5,1
1,99	4,99	2,01	5,01
1,999	4,999	2,001	5,001



Tentons d'y voir plus clair, on constate dans le graphique ci–contre que les images sont définies partout dans le voisinage, sauf à $x = 2$, où la fonction n'est pas définie. On dit que la fonction a un **trou** à $x = 2$. Cependant, puisque la limite existe, on devrait pouvoir la déterminer algébriquement. Si le numérateur et le dénominateur s'annulent à $x = 2$, cela signifie qu'ils ont en commun le facteur $x - 2$. C'est le seul facteur qui s'annule lorsque x prend la valeur 2. En décomposant en facteurs le numérateur de la fonction $f(x)$, on obtient :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2}.$$

On constate que le graphique de la fonction $f(x)$ est presque identique à celui de la fonction $g(x) = x + 3$, sauf que la fonction $f(x)$ a un trou à $x = 2$. Cependant, ces deux fonctions ont la même limite lorsque x s'approche de 2. On peut donc écrire :

REMARQUE
On ne dit pas que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont égales, ce qui est faux. On dit que la limite lorsque x tend vers 2 de la fonction $f(x)$ est égale à la limite lorsque x tend vers 2 de la fonction $g(x)$. Symboliquement, il est faux d'écrire :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = (x+3) = 5.$$

On doit écrire :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+3) = 5.$$

Ce qui signifie que les deux fonctions ont la même limite lorsque x s'approche de 2 et que cette limite est évaluée par substitution dans la fonction

$$g(x) = x + 3.$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-6}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}(x+3).$$

On peut alors calculer la limite en évaluant l'image par la fonction $g(x)$, cela donne $g(2) = 5$. On a donc :

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-6}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}(x+3) = 5.$$

Dans cet exemple, la démarche consiste à déterminer une fonction g ayant le même comportement que f au voisinage de 2 mais ne présentant pas de trou. On a pu évaluer la limite par substitution dans la fonction g.

PROCÉDURE

Levée d'une indétermination de la forme 0/0 (fonction rationnelle)

1. Effectuer les manipulations algébriques permettant de rendre visible le facteur qui s'annule simultanément au numérateur et au dénominateur.
2. En simplifiant ce facteur, déterminer la fonction ayant le même comportement graphique dans le voisinage, mais n'ayant pas de trou.
3. Utiliser cette fonction pour déterminer la limite par calcul de l'image.

Limites05

REMARQUE
Lorsque la règle de correspondance d'une fonction n'est pas définie pour une valeur particulière de sa variable indépendante, il faut alors analyser le comportement de la fonction dans le voisinage de cette valeur. Nous pouvons ainsi déduire la forme du graphique dans cet intervalle. La détection par calcul des images que nous avons présentée n'est pas suffisante pour déterminer la forme complète d'un graphique. Il faut parfois avoir recours à des méthodes d'analyse plus sophistiquées que nous présenterons ultérieurement.

EXEMPLE 1.3.3

Évaluer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{4}}{x-4}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

Solution

a) En substituant 3 à x, on constate que l'on obtient une forme indéterminée 0/0. Cela signifie que le numérateur et le dénominateur ont un facteur commun. Ce facteur est $x - 3$. En décomposant le numérateur en facteurs, on obtient :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3).$$

Les fonctions $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ et $g(x)=(x+3)$ ont la même limite lorsque x s'approche de 3. Cependant, on peut facilement déterminer celle de $g(x)$ et on obtient :

$$\lim_{x\to 3}(x+3) = 6.$$

On trouve donc

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6.$$

b) En substituant 4 à x, on constate que l'on obtient une forme indéterminée 0/0. Cela signifie que le numérateur et le dénominateur ont un facteur commun. Ce facteur est actuellement caché, mais en procédant à une mise au même dénominateur, on obtient :

$$\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{4}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{4-x}{4x}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{4x(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{-1\times(x-4)}{4x(x-4)}.$$

Ce facteur est maintenant visible, c'est $x-4$. On peut donc dire que les fonctions :

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{4}}{x-4}\text{ et }g(x)=\frac{-1}{4x}.$$

ont la même limite lorsque x s'approche de 4. On peut facilement déterminer celle de $g(x)$ par substitution et on obtient :

$$\lim_{x\to 4}\frac{-1}{4x}=\frac{-1}{16}.$$

On trouve donc que

$$\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{4}}{x-4}=\frac{-1}{16}.$$

REMARQUE
Pour évaluer une limite donnant une forme indéterminée 0/0, la décomposition en facteurs n'est pas la seule manipulation algébrique exploitable. On peut avoir à faire une mise au même dénominateur ou à multiplier par le conjugué.

c) En substituant 2 à x, on constate que l'on obtient une forme indéterminée 0/0. Cela signifie que le numérateur et le dénominateur ont un facteur commun. Ce facteur est actuellement caché, mais en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, on obtient :

Rationnalisation01

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{(x-2)}.$$

On peut alors décomposer en facteurs pour obtenir :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{(x-2)}.$$

Le facteur commun est maintenant visible, c'est $x-2$. On peut donc dire que les fonctions :

$$f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\text{ et }g(x)=(x+2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)$$

ont la même limite lorsque x s'approche de 2. On peut facilement déterminer celle de $g(x)$ et on obtient :

$$\lim_{x\to 2}\left[(x+2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)\right]=4(\sqrt{2}+\sqrt{2})=8\sqrt{2}.$$

On trouve donc que :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=8\sqrt{2}.$$

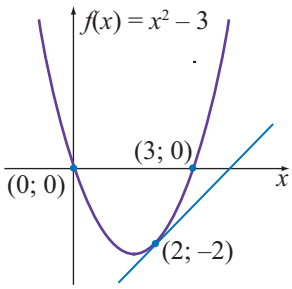
Évaluation du taux de variation ponctuel

La définition du taux ponctuel donne une expression de la forme 0/0. On peut cependant évaluer la limite sans avoir à calculer le taux de variation moyen sur des sous-intervalles emboîtés. On y parvient en appliquant des manipulations algébriques qui ont pour but de lever l'indétermination. Illustrons cela à l'aide d'un exemple.

Considérons la fonction $f(x) = x^2 - 3x$. Le taux de variation au point d'abscisse 2, est donné par :

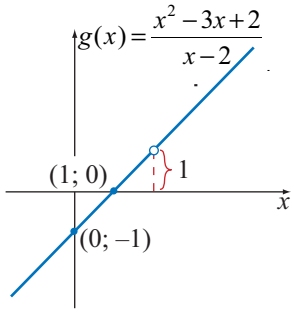
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_2 = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-3x)-(4-6)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}.$$

TauxPonctuel07



En substituant 2 à x, on obtient 0/0. Pourquoi ? C'est le facteur $x - 2$ qui s'annule lorsque x s'approche de 2. Ce facteur doit donc être présent au numérateur. En effet, $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$. En décomposant le numérateur en facteurs, on a donc

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_2 = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}.$$



En simplifiant l'expression, on obtient alors

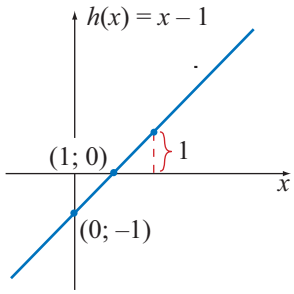
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_2 = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-1).$$

En substituant 2 à x dans la dernière expression de cette chaîne d'égalités, on obtient

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_2 = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-1) = 2-1 = 1.$$

La valeur obtenue est le taux de variation ponctuel de la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3x$ au point (2; –2).

On interprète la démarche de la façon suivante :



En cherchant à déterminer la pente de la tangente au point (2; –2) de la fonction $f(x)$, on doit évaluer la limite lorsque x tend vers 2 de la fonction

$$g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2}.$$

Celle-ci n'est pas définie à 2 puisqu'on obtient 0/0 en substituant 2 à x. La fonction est cependant définie partout ailleurs. On peut alors simplifier l'expression. La fonction $g(x)$ a donc le même comportement, sauf à $x = 2$, que la fonction $h(x) = x - 1$.

REMARQUE

On dit que la fonction $g(x)$ a une discontinuité par **trou** à $x = 1$. La limite de la fonction lorsque x tend vers 1 est la valeur qu'il faut assigner à la variable dépendante pour que la fonction soit continue à $x = 1$.

Les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ ont la même limite lorsque x tend vers 2 et on peut évaluer cette limite en substituant 2 à x dans la règle de correspondance de la fonction $h(x)$. La valeur obtenue est la pente de la tangente au point (2; –2) de la fonction $f(x)$. La bonne nouvelle, c'est que l'on peut évaluer la limite sans faire de calculs sur des intervalles emboîtés, mais en contrepartie, il faut appliquer correctement diverses manipulations algébriques.

TauxPonctuel08

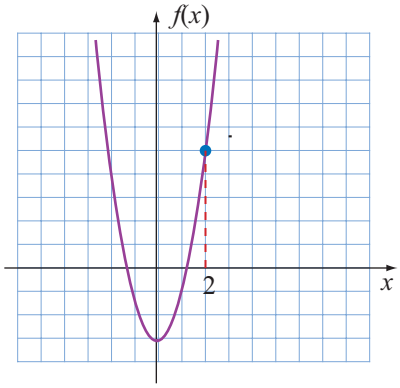
EXEMPLE 1.3.4

Le graphique ci-contre représente la courbe de la fonction

$$f(x) = 2x^2 - 3$$

Calculer la pente de la tangente au point d'abscisse 2, soit le taux de variation ponctuel de la fonction à l'aide de la règle de correspondance de la fonction.

TauxPonctuel09



Solution

Le taux de variation ponctuel est donné par :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_2 = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3-5}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2}.$$

En substituant 2 à x, on obtient une forme 0/0, ce qui signifie que le facteur $x - 2$ est présent au numérateur. En mettant 2 en évidence et en factorisant la différence de carrés, on obtient :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_2 = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3-5}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2}$$

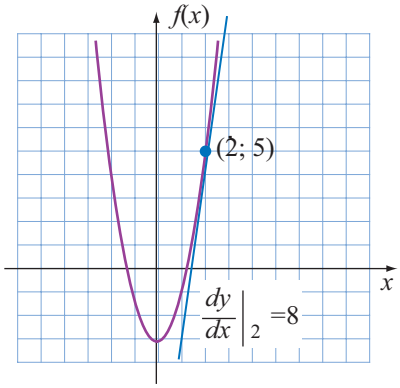
$$= \lim_{x\to 2}\frac{2(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+2)}{x-2}.$$

En simplifiant le facteur $x - 2$, on obtient une expression dont on peut évaluer la limite en substituant 2 à x.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_2 = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3-5}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} 2(x+2) = 2\times 4 = 8.$$



Le taux de variation ponctuel de la fonction au point (2; 5) est égal à 8. Graphiquement, la pente de la tangente en ce point est 8.

Pour évaluer le taux de variation ponctuel d'une fonction irrationnelle, il faut procéder par rationalisation pour déterminer une expression algébrique dont on peut évaluer la limite par substitution.

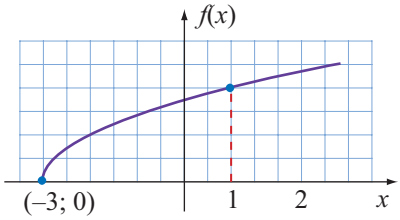
EXEMPLE 1.3.5

Le graphique ci-contre représente la courbe de la fonction

$$f(x) = \sqrt{x+3}.$$

Calculer la pente de la tangente au point d'abscisse 1, soit le taux de variation ponctuel de la fonction à l'aide de la règle de correspondance de la fonction.

TauxPonctuel09



Solution

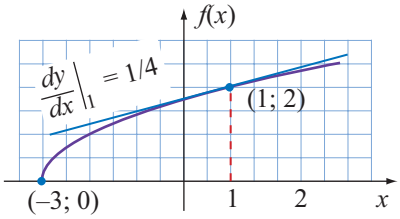
Le taux de variation ponctuel au point d'abscisse 1 est :

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_1 = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}.$$

En substituant 1 à x dans cette expression, on obtient 0/0. Puisque c'est le facteur $x - 1$ qui s'annule lorsqu'on procède à cette substitution, il faut en conclure que ce facteur est présent au numérateur, mais il est bien camouflé. Pour le rendre visible, on doit rationaliser l'expression en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{x+3}+2$, ce qui donne :

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_1 = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right)$$



Il est maintenant possible de simplifier le facteur $x - 1$ pour obtenir une expression dont on peut évaluer la limite en substituant 1 à x, soit :

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_1 = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Le taux de variation ponctuel au point (1; 2) est 1/4.

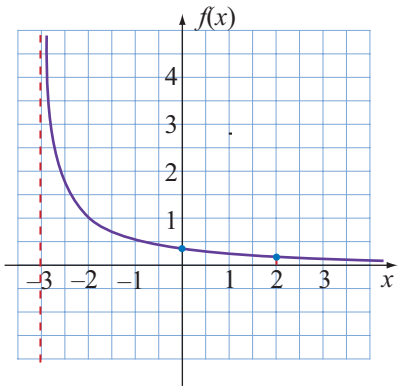
EXEMPLE 1.3.6

TauxPonctuel09

Le graphique ci-contre représente la partie positive de la courbe de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x+3}.$$

Calculer la pente de la tangente au point d'abscisse 1, soit le taux de variation ponctuel à l'aide de la règle de correspondance de la fonction.



Solution

Le taux de variation ponctuel au point d'abscisse 2 est

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_2 = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{5}}{x-2}.$$

En substituant 2 à x dans cette expression, on obtient 0/0. Puisque c'est le facteur $x - 2$ qui s'annule lorsqu'on procède à cette substitution, il faut en conclure que ce facteur est présent au numérateur, mais il est bien camouflé. Pour le rendre visible, on doit procéder à la mise au même dénominateur de la différence des fractions au numérateur,

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_2 = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{5}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{5-(x+3)}{5(x+3)}}{x-2}$$

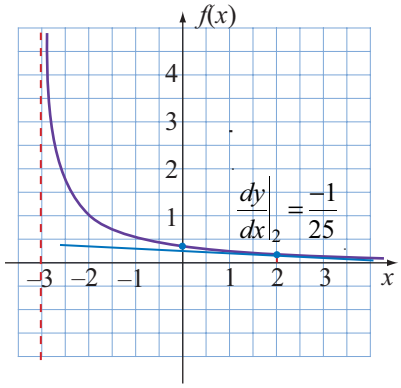
$$= \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{5(x+3)}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{5(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{-1(x-2)}{5(x-2)(x+3)}.$$

Il est maintenant possible de simplifier le facteur $x - 2$ pour obtenir une expression dont on peut évaluer la limite en substituant 2 à x, soit :

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_2 = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{5}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{5-(x+3)}{5(x+3)}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{5(x+3)}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{5(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{-1(x-2)}{5(x-2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{5(x+3)} = \frac{-1}{5(2+3)} = \frac{-1}{25}.$$



Le taux de variation ponctuel au point (2; 1/5) est –1/25.

Les trois manipulations algébriques présentées dans les exemples précédents, soit la factorisation, la rationalisation et la mise au même dénominateur, sont celles dont on se sert pour déterminer le taux de variation ponctuel d'une fonction algébrique.

Lorsque la fonction décrit un phénomène particulier, il faut tenir compte des unités de mesure dans la présentation et l'interprétation des résultats. De plus, si la variable indépendante est le temps, le taux de variation ponctuel est appelé **taux de variation instantané**.

EXEMPLE 1.3.7

On lance une balle verticalement à partir du sol avec une vélocité de 20 m/s. La position de la balle mesurée à partir du sol est décrite par

$$s = 20t - 4{,}9t^2 \text{ mètres.}$$

Déterminer le taux de variation instantané de la position s par rapport au temps t à 3 s. Donner l'interprétation physique de ce taux de variation.

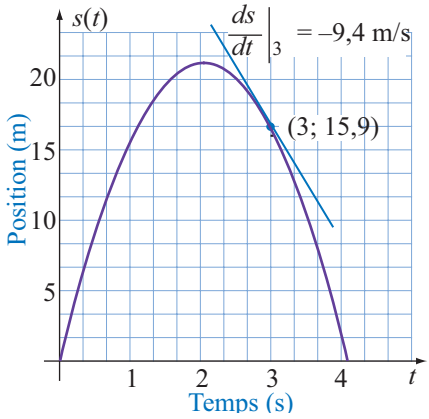
TauxPonctuel10

Solution

La variable indépendante est le temps t, on cherche donc le taux de variation instantané à $t = 3$. Celui-ci est donné par :

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_3 = \lim_{t\to 3}\frac{s(t)-s(3)}{t-3} = \lim_{t\to 3}\frac{20t-4{,}9t^2-15{,}9}{t-3}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

En substituant 3 à t, on obtient une forme 0/0, ce qui signifie que le facteur $t - 3$ est présent au numérateur. En factorisant, on obtient :



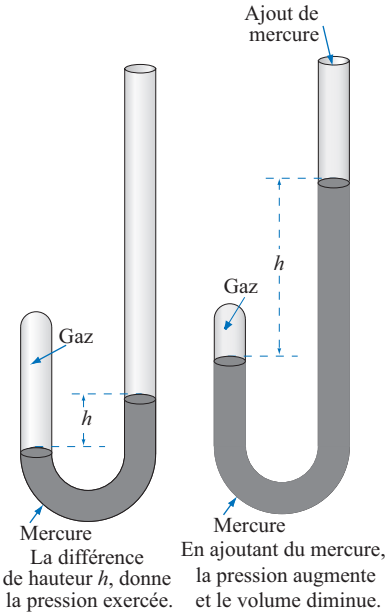
$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_3 = \lim_{t\to 3}\frac{s(t)-s(3)}{t-3} = \lim_{t\to 3}\frac{20t-4{,}9t^2-15{,}9}{t-3}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$= \lim_{t\to 3}\frac{(-4{,}9t+5{,}3)(t-3)}{t-3}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

On peut alors simplifier et évaluer la limite en substituant 3 à t,

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_3 = \lim_{t\to 3}\frac{s(t)-s(3)}{t-3} = \lim_{t\to 3}\frac{20t-4{,}9t^2-15{,}9}{t-3}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$= \lim_{t\to 3}\frac{(-4{,}9t+5{,}3)(t-3)}{t-3}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$= \lim_{t\to 3}(-4{,}9t+5{,}3)\ \text{m/s} = -9{,}4\ \text{m/s}.$$

Le taux instantané est de –9,4 m/s, c'est la vitesse du projectile à 3 s. Ce taux étant négatif, le projectile s'approche du point de référence, donc, à 3 s, il retombe à une vitesse de 9,4 m/s.

TauxPonctuel11



(NH Boyle

EXEMPLE 1.3.8

Le chimiste anglais Robert Boyle (1627-1691) a réalisé une expérience qui a permis de montrer que le volume occupé par un gaz à température constante est inversement proportionnel à la pression exercée sur ce gaz. L'expérience consistait à emprisonner un gaz dans un tube de verre recourbé comme dans l'illustration. Le rayon du tube étant constant, la hauteur de la colonne de gaz permet de trouver son volume. De plus, en ajoutant du mercure, la pression exercée sur le gaz augmente et la mesure de cette pression est donnée par la différence de hauteur h en pouces de mercure. Le modèle issu de l'expérience est :

$$V = \frac{1400}{p},$$

où V est le volume (po^3) et p est la pression (po de mercure dont le symbole est Hg).

a) Déterminer le taux de variation ponctuel du volume lorsque la pression est de 30 po de Hg. Interpréter le résultat.

b) Déterminer le taux de variation ponctuel du volume lorsque la pression est de 60 po de Hg. Interpréter le résultat.

Solution

a) Le taux de variation ponctuel est donné par :

$$\left.\frac{dV}{dp}\right|_{30} = \lim_{p\to 30}\frac{V(p)-V(30)}{p-30} = \lim_{p\to 30}\frac{\frac{1400}{p}-\frac{1400}{30}}{p-30}\frac{\text{po}^3}{\text{po de Hg}}.$$

En substituant 30 à p dans cette expression, on obtient 0/0. Puisque c'est le facteur $p - 30$ qui s'annule lorsqu'on procède à cette substitution, il faut en conclure que ce facteur est présent au numérateur. Pour le rendre visible, on doit procéder à la mise au même dénominateur de la différence des fractions au numérateur,

$$\left.\frac{dV}{dp}\right|_{30} = \lim_{p\to 30}\frac{V(p)-V(30)}{p-30} = \lim_{p\to 30}\frac{\dfrac{1400}{p}-\dfrac{1400}{30}}{p-30}$$

$$= \lim_{p\to 30}\frac{\dfrac{42000-1400p}{30p}}{p-30} = \lim_{p\to 30}\frac{1400(30-p)}{30p(p-30)}\,\frac{\text{po}^3}{\text{po de Hg}}.$$

On peut alors simplifier et évaluer la limite en substituant 30 à p, ce qui donne :

$$\left.\frac{dV}{dp}\right|_{30} = \lim_{p\to 30}\frac{V(p)-V(30)}{p-30} = \lim_{p\to 30}\frac{1400(30-p)}{30p(p-30)}$$

$$= \lim_{p\to 30}\frac{-1400}{30p}\,\frac{\text{po}^3}{\text{po de Hg}} = \frac{-1400}{900}\ \text{po}^3/\text{po de Hg}$$

$$= -1{,}555...\ \text{po}^3/\text{po de Hg}.$$

Le volume de gaz emprisonné dans le tube de verre tend à diminuer de 1,56 pouces cubes pour une augmentation de 1 pouce de mercure de la pression lorsque la différence de hauteur est de 30 po.

b) En appliquant la même démarche pour 60 po, on obtient :

$$\left.\frac{dV}{dp}\right|_{60} = \lim_{p\to 60}\frac{V(p)-V(60)}{p-60} = \lim_{p\to 60}\frac{\dfrac{1400}{p}-\dfrac{1400}{60}}{p-30}$$

$$= \lim_{p\to 60}\frac{\dfrac{84000-1400p}{60p}}{p-60} = \lim_{p\to 60}\frac{1400(60-p)}{60p(p-60)}$$

$$= \lim_{p\to 60}\frac{-1400}{60p} = \frac{-1400}{3600}\ \text{po}^3/\text{po de Hg}$$

$$= -0{,}388...\ \text{po}^3/\text{po de Hg}.$$

Le volume de gaz emprisonné dans le tube de verre tend à diminuer de 0,39 pouce cube pour une augmentation de 1 pouce de mercure de pression lorsque la différence de hauteur est de 60 po. Le volume diminue de moins en moins rapidement pour une même augmentation de la pression lorsque celle-ci est plus grande.

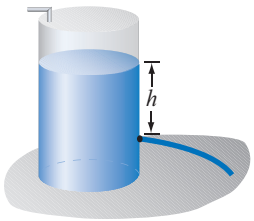
EXEMPLE 1.3.9

On veut remplir un réservoir, mais une petite perforation sur le côté de celui-ci laisse échapper du liquide. L'équation de Bernoulli régissant le mouvement des liquides incompressibles indique que la vitesse d'éjection du liquide est décrite par le modèle

$$v(h) = 4{,}43\sqrt{h}\ \text{m/s},$$

où h est la différence en mètres entre le niveau de liquide et celui de l'ouverture. Calculer le taux de variation de la vitesse d'éjection lorsque la différence de hauteur est de 2 m et lorsqu'elle est de 4 m.

TauxPonctuel12



Solution

Le taux de variation ponctuel à $h = 2$ m est donné par

$$\left.\frac{dv}{dh}\right|_2 = \lim_{h\to 2}\frac{v(h)-v(2)}{h-2} = \lim_{h\to 2}\frac{4{,}43\sqrt{h}-4{,}43\sqrt{2}}{h-2} = \lim_{h\to 2}\frac{4{,}43(\sqrt{h}-\sqrt{2})}{h-2}.$$

En substituant 2 à h dans cette expression, on obtient 0/0. Puisque c'est le facteur $h - 2$ qui s'annule lorsqu'on procède à cette substitution, il faut en conclure que ce facteur est présent au numérateur. Puisque le numérateur comporte une différence de radicaux, il faut rationaliser le numérateur. Pour obtenir une expression équivalente, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{h}+\sqrt{2}$,

$$\left.\frac{dv}{dh}\right|_2 = \lim_{h\to 2}\frac{v(h)-v(2)}{h-2} = \lim_{h\to 2}\frac{4{,}43\sqrt{h}-4{,}43\sqrt{2}}{h-2} = \lim_{h\to 2}\frac{4{,}43(\sqrt{h}-\sqrt{2})}{h-2}.$$

$$= \lim_{h\to 2}\frac{4{,}43(\sqrt{h}-\sqrt{2})}{h-2}\times\frac{\sqrt{h}+\sqrt{2}}{\sqrt{h}+\sqrt{2}} = \lim_{h\to 2}\frac{4{,}43(h-2)}{(h-2)(\sqrt{h}+\sqrt{2})}.$$

Il est maintenant possible de simplifier le facteur $h - 2$ pour obtenir une expression dont on peut évaluer la limite en substituant 2 à h, soit :

$$\left.\frac{dv}{dh}\right|_2 = \lim_{h\to 2}\frac{v(h)-v(2)}{h-2} = \lim_{h\to 2}\frac{4{,}43(h-2)}{(h-2)(\sqrt{h}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{h\to 2}\frac{4{,}43}{\sqrt{h}+\sqrt{2}} = \frac{4{,}43}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{4{,}43}{2\sqrt{2}}\frac{\text{m/s}}{\text{m}} \approx 1{,}57 \text{ m/s}\cdot\text{m}.$$

La vitesse d'éjection a tendance à augmenter de 1,57 m/s pour une augmentation de 1 m de la différence de niveau lorsque celle-ci est de 2 m.

Par la définition de taux de variation ponctuel pour une différence de niveau de 4 m, on obtient :

$$\left.\frac{dv}{dh}\right|_4 = \lim_{h\to 4}\frac{v(h)-v(4)}{h-4} = \lim_{h\to 4}\frac{4{,}43\sqrt{h}-4{,}43\sqrt{4}}{h-4} = \lim_{h\to 4}\frac{4{,}43(\sqrt{h}-2)}{h-4}.$$

En substituant 4 à h, on obtient 0/0. Il faut rationaliser, ce qui donne

$$\left.\frac{dv}{dh}\right|_4 = \lim_{h\to 4}\frac{v(h)-v(4)}{h-4} = \lim_{h\to 4}\frac{4{,}43\sqrt{h}-4{,}43\sqrt{4}}{h-4} = \lim_{h\to 4}\frac{4{,}43(\sqrt{h}-2)}{h-4}$$

$$= \lim_{h\to 4}\frac{4{,}43(\sqrt{h}-2)}{h-4}\times\frac{\sqrt{h}+2}{\sqrt{h}+2} = \lim_{h\to 4}\frac{4{,}43(h-4)}{(h-4)(\sqrt{h}+2)}$$

$$= \lim_{h\to 4}\frac{4{,}43}{\sqrt{h}+2} = \frac{4{,}43}{\sqrt{4}+2} = \frac{4{,}43}{4} \approx 1{,}11 \text{ m/s}\cdot\text{m}.$$

La vitesse d'éjection a tendance à augmenter de 1,11 m/s pour une augmentation de 1 m de la différence de niveau lorsque celle-ci est de 4 m.

TauxPonctuel13

Algèbre de l'infini

Limites infinies, forme *k*/0

Considérons le cas où le dénominateur est seul à s'annuler. On a alors une limite de la forme *k*/0. Effectuons quelques calculs pour analyser la situation et dégager une procédure pour éviter les calculs par la suite.

EXEMPLE 1.3.10

Évaluer $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$.

Solution

Lorsque x s'approche de 3, cette expression s'approche de 1/0. Pour visualiser le comportement, considérons la fonction définie par :

$$f(x)=\left(\frac{1}{x-3}\right).$$

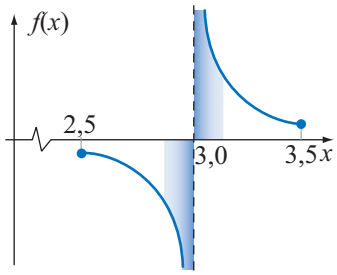
En calculant les images par la fonction lorsque x s'approche de 3 par la gauche et par la droite, on obtient les valeurs consignées dans le tableau ci–contre. On constate que lorsque x tend vers 3 par la gauche, les images deviennent de plus en plus grandes négativement. De plus, lorsque x tend vers 3 par la droite les images deviennent de plus en plus grandes positivement. La limite n'existe pas et on écrit :

$$\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{1}{x-3}\right)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{x-3}\right)=\infty.$$

La représentation graphique permet de voir que le graphique se rapproche de plus en plus d'une droite verticale à mesure que x s'approche de 3. On dit que le graphique de la fonction a une asymptote verticale à $x = 3$.

Limites06

Analyse du comportement			
à gauche		à droite	
x	$\dfrac{1}{x-3}$	x	$\dfrac{1}{x-3}$
2,5	–2	3,5	2
2,9	–10	3,1	10
2,99	–100	3,01	100
2,999	–1000	3,001	1000



Asymptote verticale

Le graphique d'une fonction f a une **asymptote verticale** à $x = c$ si au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=-\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to c^-} f(x)=\infty$$
$$\text{ou} \quad \lim_{x\to c^+} f(x)=-\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to c^+} f(x)=\infty.$$

REMARQUE

Rappelons que la limite lorsque x tend vers c existe si la limite à gauche est égale à la limite à droite et que la valeur limite est un nombre réel. Dire que la limite est l'infini signifie que la limite n'existe pas.

Cependant, lorsqu'on analyse une fonction on donne le résultat en distinguant le comportement à gauche et à droite comme nous l'avons fait dans l'exemple 1.3.10.

La question qui se pose maintenant est de savoir si on aurait pu évaluer la limite de l'exemple précédent sans effectuer de calculs. La réponse est oui. Pour voir comment procéder, introduisons une notation nouvelle.

Notations

$\dfrac{k}{0^+}$ signifie que le numérateur s'approche d'une valeur constante alors que le dénominateur s'approche de 0 tout en étant positif. Dans un tel cas, la limite est $+\infty$ si k est positif et $-\infty$ si k est négatif.

$\dfrac{k}{0^-}$ signifie que le numérateur s'approche d'une valeur constante alors que le dénominateur s'approche de 0 tout en étant négatif. Dans un tel cas, la limite est $-\infty$ si k est positif et $+\infty$ si k est négatif.

REMARQUE

Il suffit de respecter la règle des signes, un négatif divisé par un négatif donne un positif. Alors qu'un négatif divisé par un positif donne un négatif.

Dans un quotient, lorsque le dénominateur tend vers 0 et que le numérateur est différent de 0, le quotient tend vers $\pm\infty$, selon le signe du numérateur et du dénominateur.

Lorsqu'un tel quotient fait partie de la règle de correspondance d'une fonction, le graphique de celle-ci a une asymptote verticale.

Voyons maintenant comment exploiter cette notation dans l'analyse du comportement, au voisinage de 3, de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x-3}.$$

Lorsque x s'approche de 3 par la gauche (3^-), le numérateur s'approche de 1 alors que le dénominateur s'approche de 0 en étant plus petit que 0. On a donc :

$$\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{1}{x-3} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Lorsque x s'approche de 3 par la droite (3^+), le numérateur s'approche de 1 alors que le dénominateur s'approche de 0 en étant plus grand que 0. On a donc :

$$\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{1}{x-3} \right) = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

PROCÉDURE

Évaluation d'une limite de la forme *k*/0

1. Analyser le comportement de la fonction au voisinage de c.
2. Utiliser le symbolisme des limites pour décrire le comportement à gauche et à droite de c.

EXEMPLE 1.3.11

Limites07

Évaluer $\lim_{x \to -2} \left(\frac{x-5}{x+2} \right)$.

Solution

Lorsque x s'approche de –2, cette expression s'approche de –7/0. C'est une forme k/0. On doit donc analyser le comportement à gauche et à droite.

À gauche

Lorsque x s'approche de –2 par la gauche, le numérateur s'approche de –7 et le dénominateur s'approche de 0 en étant négatif. C'est une forme $-7/0^-$. Par conséquent :

$$\lim_{x \to -2^-} \left(\frac{x-5}{x+2} \right) = \frac{-7}{0^-} = \infty.$$

À droite

Lorsque x s'approche de –2 par la droite, le numérateur s'approche de –7 et le dénominateur s'approche de 0 en étant positif. C'est une forme $-7/0^+$. Par conséquent :

$$\lim_{x \to -2^+} \left(\frac{x-5}{x+2} \right) = \frac{-7}{0^+} = -\infty.$$

Un peu *d'histoire*

LE PARADIGME ARISTOTÉLICIEN

Un paradigme est une représentation cohérente du monde qui repose sur une base clairement définie. Il constitue un cadre de référence à l'intérieur duquel les phénomènes sont interprétés et expliqués. Toute théorie ou hypothèse non conforme au paradigme ou entrant en contradiction avec un de ses principes est rejetée.

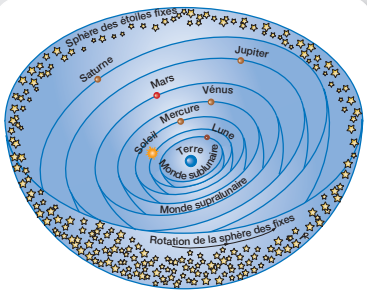
Au début du XVIe siècle, le paradigme en vigueur est celui hérité d'Aristote (NH Aristote01, Aristote). Ce philosophe grec, qui fut élève de Platon (NH Platon01) à l'Académie d'Athènes, a développé une théorie de la connaissance très différente de celle de son maître.

Pour Aristote, la connaissance n'est pas une réminiscence mais le fruit de l'observation et de l'expérience. Dans les *Seconds analytiques,* Aristote présente l'expérience comme un fruit de la mémoire. La sensation plusieurs fois répétée engendre la mémoire, et celle-ci, accumulée, engendre l'expérience. L'expérience, au sens d'Aristote ne désigne pas l'observation d'un événement singulier, elle est l'énoncé universel d'un fait éprouvé par tous. Un tel énoncé peut servir d'hypothèse dans une déduction scientifique, sans être contesté. Ainsi, nous savons **par expérience** que la Terre tourne autour du Soleil parce que nous sommes habitués à voir cette succession se produire. Cela peut servir d'argument dans une déduction scientifique, sans être contesté. Cet énoncé a valeur d'axiome, comme en géométrie, et ne requiert aucune preuve.

L'interprétation aristotélicienne de l'expérience impose des contraintes importantes. Un savant qui réfère à un phénomène naturel familier dans un débat n'a aucune difficulté à faire admettre son argumentation. Cependant, le savant qui réfère à un phénomène qu'il est seul à avoir observé ou qu'il a lui-même provoqué est peu crédible.

Cette conception de l'expérience a amené Aristote à privilégier certaines théories parmi celles énoncées par ses prédécesseurs et à rejeter les autres. Il a retenu le modèle géocentrique de l'univers imaginé par Eudoxe (NH Eudoxe01, Eudoxe Astronome) et la caution aristotélicienne de ce modèle a amené le rejet du modèle héliocentrique d'Aristarque (NH Aristarque, Dimensions Aristarque) et de tout autre modèle analogue.

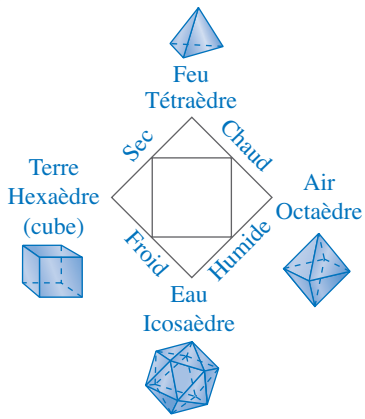
Les mathématiciens et les astronomes grecs ont adopté le paradigme aristotélicien et cherché à expliquer les phénomènes célestes à l'intérieur de ce cadre géocentrique. Ils ont cependant constaté que la théorie des mouvements circulaires ne rend pas parfaitement compte de la trajectoire des planètes. Les mouvements observés comportent des variations apparentes de la distance (distance Terre Lune) et de la luminosité, des arrêts et des retours en arrière (mouvements rétrogrades). Pour concilier les observations avec le paradigme, les astronomes ont eu recours à différents artifices. Apollonius (NH Apollonius) a introduit la notion d'excentricité et supposé que l'orbite de chaque planète est décrite par un cercle dont le centre est décalé par rapport au centre de la Terre, d'où l'appellation d'excentrique pour décrire ce concept. Il préserve ainsi les orbites circulaires, mais n'explique pas toutes les irrégularités. Pour expliquer les variations observées, l'astronome Hipparque (NH Hipparque01, Hipparque) développe les notions d'épicycle et de déférent (NH Hipparque02), notions qui sont reprises par Ptolémée (NH Ptolémée, Ptolémée).



Modèle d'Eudoxe

Théorie du mouvement

Aristote (NH Aristote) divise l'univers en mondes sublunaire et supralunaire. Le monde supralunaire est le lieu de la perfection et la sphère est la forme géométrique parfaite, seule appropriée pour les corps parfaits que sont les corps célestes. Dans le monde supralunaire, les seuls mouvements sont ceux des sphères, mouvements parfaitement réguliers et immuables.



Les quatre éléments

Dans le monde sublunaire, Aristote rejette la théorie atomiste de Démocrite (NH Démocrite) pour retenir celle des quatre éléments d'Empédocle (NH Empédocle), sans retenir la justification de leur existence imaginée par Platon (NH Platon02) ni associer à chacun d'eux un des corps réguliers comme celui-ci l'avait fait (NH Platon03). Le rejet de la théorie atomiste est dû en partie au fait que, pour Aristote, le vide, qu'il associe au néant, ne peut exister.

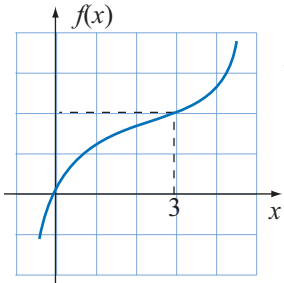
Dans le monde sublunaire, Aristote distingue deux sortes de mouvement. Le mouvement naturel du corps en chute libre et dont l'explication se fonde sur l'existence des quatre éléments constitutifs du monde sublunaire.

Le mouvement violent est causé par une force qui se transmet seulement par contact. L'effet prend fin lorsque la cause du mouvement violent prend fin. Pourquoi dès lors le corps qu'on lance continue-t-il sur sa lancée après avoir quitté la main ? En se déplaçant, le corps tend à créer un vide derrière lui. Puisque le vide ne peut exister l'air s'y engouffre aussitôt et exerce une poussée sur le corps, maintenant le mouvement de celui-ci. Le modèle d'Aristote a fait l'objet de discussions et de débats de la part des savants grecs, arabes et européens avant qu'un nouveau paradigme ne soit adopté.

1.4 Exercices

1. Dans les situations suivantes, déterminer l'image, la limite à gauche et la limite à droite de la valeur particulière indiquée et la limite si celle-ci existe.

a)



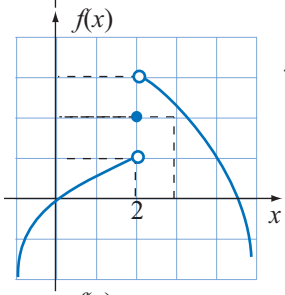
$f(3) =$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

b)



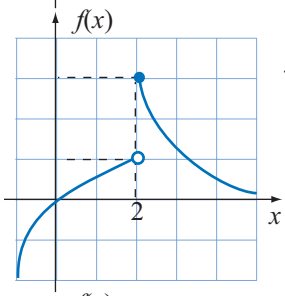
$f(2) =$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

c)



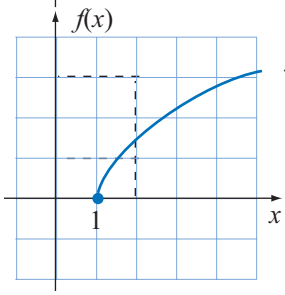
$f(2) =$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

d)



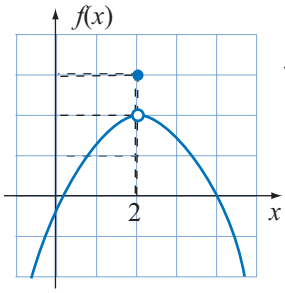
$f(1) =$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

e)



$f(2) =$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

2. Évaluer algébriquement les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{2(x-1)}}{x^2-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x+4)$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2+4}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-6x-7}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-8x+16}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3}{3x+3}$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{1-x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+2x-8}$

j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-2}{x^2-9}$

k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

l) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$

m) $\lim\limits_{x\to -4}\sqrt{\dfrac{2x^2+5x-12}{2x^2+9x+4}}$

n) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{x^2-9}$

o) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

p) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3}{4-x}$

q) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}}{x-4}$

r) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}$

s) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-x-15}{x^2-3x}$

t) $\lim\limits_{t\to -5}\sqrt{\dfrac{t+5}{t+3}}$

u) $\lim\limits_{s\to -3}\dfrac{\sqrt{s+4}-1}{s+3}$

v) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8}{(2-x)^2}$

w) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

x) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+5x-10}{x^2-4}$

y) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2+4x-12}{x^2-6x+9}$

z) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+5x^2+5x+4}{x^2+x-12}$

3. Soit la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - 4x$$

a) Estimer le taux de variation ponctuel de f par rapport à x au point d'abscisse –2. Donner l'interprétation graphique de ce taux de variation.
b) Estimer le taux de variation ponctuel de f par rapport à x au point d'abscisse 0. Donner l'interprétation graphique de ce taux de variation.
c) Calculer le taux de variation ponctuel de f par rapport à x au point d'abscisse 2. Donner l'interprétation graphique de ce taux de variation.

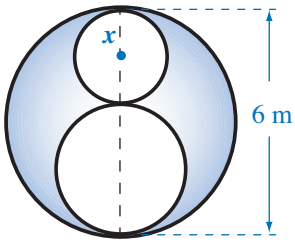
4. Soit la fonction définie par :

$$f(x) = 9 - x^2$$

a) Estimer le taux de variation ponctuel de f par rapport à x au point d'abscisse –3. Donner l'interprétation graphique de ce taux de variation.
b) Estimer le taux de variation ponctuel de f par rapport à x au point d'abscisse 0. Donner l'interprétation graphique de ce taux de variation.
c) Estimer le taux de variation ponctuel de f par rapport à x au point d'abscisse 3. Donner l'interprétation graphique de ce taux de variation.

5. On lance un projectile verticalement avec une vélocité de 147 m/s. La hauteur de la balle mesurée à partir du sol est décrite par $s(t) = 147t - 4{,}9t^2$ m.
a) Estimer le taux de variation instantané de s par rapport à t à 1 seconde. Donner l'interprétation physique de ce taux de variation.
b) Calculer le taux de variation instantané de s par rapport à t à 6 secondes. Donner l'interprétation physique de ce taux de variation.
c) Estimer la vitesse d'impact au sol.

6. On doit réaliser une conduite devant contenir deux conduites plus petites. Le plan en coupe est reproduit ci-dessous.



a) Décrire, dans cette coupe, l'aire A occupée par les deux conduites intérieures en fonction du rayon x de l'une de celles-ci.

b) Déterminer la règle de correspondance de la fonction définie par $g(x) = \dfrac{A(x) - A(1)}{x - 1}$ et indiquer ce qu'elle représente selon le contexte.
c) La fonction obtenue en b) est-elle continue pour tout x ?
d) Quelle devrait être l'image de 1 par la fonction en b) pour qu'elle soit continue pour tout x.
e) Que représente selon le contexte la limite suivante :

$$\lim_{x \to 1} \frac{A(x) - A(1)}{x - 1}.$$

f) Déterminer la règle de correspondance de la fonction définie par $g(x) = \dfrac{A(x) - A(1{,}5)}{x - 1{,}5}$ et indiquer ce qu'elle représente selon le contexte.
g) La fonction obtenue en f est-elle continue pour tout x ?
h) Quelle devrait être l'image de 1,5 par la fonction en f pour qu'elle soit continue pour tout x.
i) Que représente selon le contexte la limite suivante :

$$\lim_{x \to 1{,}5} \frac{A(x) - A(1{,}5)}{x - 1{,}5}.$$

j) Déterminer la règle de correspondance de la fonction définie par $g(x) = \dfrac{A(x) - A(2)}{x - 2}$ et indiquer ce qu'elle représente selon le contexte.
k) La fonction obtenue en j est-elle continue pour tout x ?
l) Quelle devrait être l'image de 2 par la fonction en j pour qu'elle soit continue pour tout x.
m) Que représente selon le contexte

$$\lim_{x \to 2} \frac{A(x) - A(2)}{x - 2}.$$

7. Dans les cas suivants, déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et interpréter le résultat.
a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

8. On lance un projectile verticalement avec une vélocité de 40 m/s. La hauteur de celui-ci mesurée à partir du sol est décrite par

$$s(t) = 40t - 4{,}9t^2 \text{ m}.$$

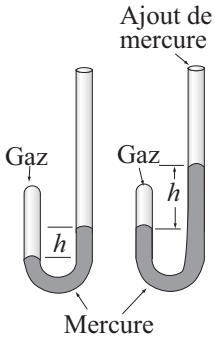
a) Trouver le taux de variation instantané de s par rapport à t à 1 seconde. Donner l'interprétation physique de ce taux de variation.
b) Trouver le taux de variation instantané de s par

rapport à t à 6 secondes. Donner l'interprétation physique de ce taux de variation.

c) Calculer la vitesse d'impact au sol.

9. On a répété l'expérience de Boyle en modifiant la température. Les mesures effectuées ont permis d'établir que la relation entre le volume du gaz utilisé et la pression exercée était :

$$V = \frac{1\,600}{p},$$

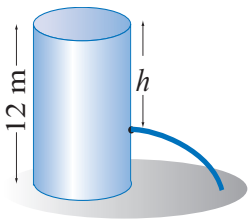


où V est en pouces cubes (po^3) et p est en pouces de mercure (po de Hg).

a) Trouver le taux de variation ponctuel du volume lorsque la pression est de 20 po de Hg. Quelle est la signification physique de ce taux de variation?

b) Trouver le taux de variation ponctuel du volume lorsque la pression est de 80 po de Hg. Quelle est la signification physique de ce taux de variation?

10. On verse du liquide dans un réservoir de 12 m qui a une perforation à la base. L'équation de Bernoulli régissant le mouvement des liquides incompressibles décrit la vitesse d'éjection de l'eau par une petite ouverture aménagée dans la paroi à une profondeur h de la façon suivante



$$v = (2gh)^{1/2}.$$

En supposant que $g = 9{,}82$ m/s^2, on a :

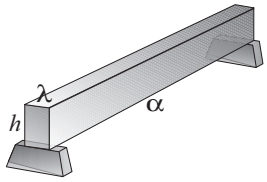
$$v = 4{,}43\ h^{1/2}.$$

a) Déterminer le taux de variation de la vitesse d'éjection lorsque le niveau de liquide est à deux mètres au-dessus de la perforation.

b) Déterminer le taux de variation de la vitesse d'éjection lorsque le niveau de liquide est à quatre mètres au-dessus de la perforation.

c) Déterminer le taux de variation de la vitesse d'éjection lorsque le niveau de liquide est à huit mètres au-dessus de la perforation.

11. Une compagnie a mis au point un nouveau matériau pour fabriquer des poutres. On a soumis des poutres de même largeur, même épaisseur, en faisant varier la distance x entre les supports de la poutre pour déterminer la charge que ces poutres pouvaient supporter sans se déformer. Cette charge est décrite en fonction de la distance α entre les supports par :



$$C(\alpha) = \frac{128\,000}{\alpha}\ \text{kg},$$

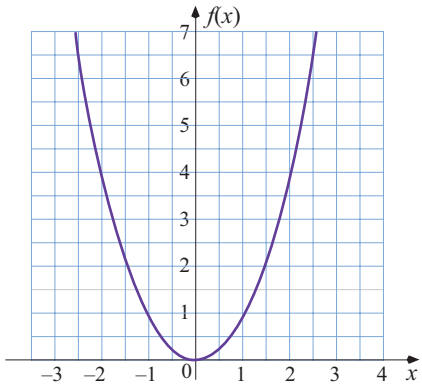
où α est en mètres (m).

a) Calculer et interpréter le taux de variation de la charge pour une distance de 8 m entre les supports.

b) Faire le même calcul pour une distance de 10 m entre les supports.

Exercices de synthèse

1. Soit la fonction définie par $f(x) = x^2$ dont le graphique est donné ci-dessous.



a) Estimer graphiquement le taux de variation ponctuel au point dont l'abscisse est 1 et au point dont l'abscisse est 2.

b) Estimer le taux de variation ponctuel au point d'abscisse 1 en calculant le taux de variation moyen sur des intervalles emboîtés, consigner les résultats dans le tableau suivant.

Évaluation de la limite			
à gauche		à droite	
Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
–0,5		0,5	
–0,1		0,1	
–0,01		0,01	
–0,001		0,001	

c) Déterminer la pente de la sécante passant par les points (1; 1) et (x; x^2).

d) Dire ce que représente dans ce contexte la limite suivante :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

(Suggestion : considérer que le point variable (x; x^2) s'approche du point (1; 1) soit par la gauche, soit par la droite.)

e) Évaluer cette limite en complétant le tableau suivant.

Évaluation de la limite			
à gauche		à droite	
x	$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$	x	$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$
0,5		1,5	
0,9		1,1	
0,99		1,01	
0,999		1,001	

f) Déterminer la pente de la sécante passant par les points (2; 4) et (x; x^2).

g) Dire ce que représente dans ce contexte la limite suivante :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

h) Évaluer cette limite en complétant le tableau suivant.

Évaluation de la limite			
à gauche		à droite	
x	$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$	x	$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$
1,5		2,5	
1,9		2,1	
1,99		2,01	
1,999		2,001	

2. Deux produits chimiques, A et B, réagissent et forment un troisième composé C. La quantité Q du produit C est décrite en fonction du temps par

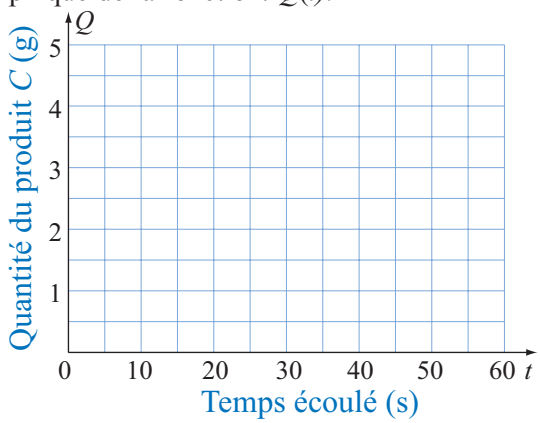
$$Q(t) = 5 - \frac{60}{t + 12} \text{ g}$$

où Q est en grammes (g) et t est en secondes (s).

a) Calculer la quantité du produit C pour compléter le tableau suivant.

Temps écoulé (s)	Quantité du produit C (g)
0	
10	
20	
30	
40	
50	
60	

À l'aide des valeurs calculées, esquisser le graphique de la fonction. $Q(t)$.



b) Calculer le taux de variation moyen sur l'intervalle [10; 20]. Représenter ce taux graphiquement.

c) Estimer le taux de variation instantané à 10 s en calculant le taux de variation moyen sur des intervalles emboîtés, consigner les résultats dans le tableau suivant.

Évaluation de la limite			
à gauche		à droite	
Δt	$\frac{\Delta Q}{\Delta t}$	Δt	$\frac{\Delta Q}{\Delta t}$
–0,5		0,5	
–0,1		0,1	
–0,01		0,01	
–0,001		0,001	

d) À partir du graphique, estimer vers quelle valeur tend le taux de variation instantané lorsque le temps s'écoule?

3. Dans les situations suivantes, donner une représentation graphique du rapport $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ Déterminer $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ et indiquer ce que représente cette limite.

a) $f(x) = x^2$ et $c = 1$

b) $f(x) = x^2$ et $c = 2$

c) $f(x) = x^2$ et $c = -1$

d) $f(x) = x^2 + 4x$ et $c = 0$

e) $f(x) = x^2 + 4x$ et $c = -1$

f) $f(x) = \sqrt{x}$ et $c = 1$

g) $f(x) = x^3$ et $c = -2$

4. Déterminer le taux de variation ponctuel de la fonction au point d'abscisse c.

a) $f(x) = x^2 + 4x$ et $c = -2$

b) $f(x) = x^2 + 4x$ et $c = 0$

c) $f(x) = x^2 - x - 6$ et $c = -2$

d) $f(x) = x^2 - x - 6$ et $c = -1$

e) $f(x) = x^2 - x - 6$ et $c = 1$

f) $f(x) = x^2 - x - 6$ et $c = 2$

g) $f(x) = x^2 - x - 6$ et $c = 3$

h) $f(x) = 2x^2 - 3x$ et $c = 2$

i) $f(x) = 3x^2 - x + 4$ et $c = 2$

j) $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ et $c = -1$

k) $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ et $c = 3$

l) $f(x) = \sqrt{x-2}$ et $c = 3$

m) $f(x) = \sqrt{x-2}$ et $c = 4$

n) $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ et $c = -3$

o) $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ et $c = 4$

p) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ et $c = 3$

q) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ et $c = 5$

r) $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ et $c = 2$

s) $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ et $c = -1$

t) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ et $c = 1$

u) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ et $c = 5$