DÉRIVÉE : FONCTIONS TRANSCENDANTES

4

Résoudre des problèmes faisant appel à la dérivée de fonctions transcendantes.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- l'utilisation de la dérivée d'une fonction exponentielle ou logarithmique dans le calcul d'un taux de variation ponctuel;
- l'approximation affine d'une fonction exponentielle ou logarithmique au voisinage d'un point;
- l'utilisation de la différentielle en un point d'une fonction exponentielle ou logarithmique dans le calcul d'erreur;
- l'application des règles de dérivation à des expressions comportant des fonctions trigonométriques;
- l'utilisation de la dérivée des fonctions trigonométriques dans le calcul d'un taux de variation ponctuel.

OBJECTIFS

4.1 Déterminer et appliquer la dérivée de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique de base *e*.

4.2 Résoudre des problèmes à l'aide de la dérivée de fonctions trigonométriques.

4.1 Dérivée, fonctions de base *e*

Dans cette section, nous allons présenter la dérivée de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique de base e. Puisque ce ne sont pas des fonctions algébriques, nous ne pouvons appliquer les techniques présentées au chapitre précédent. Nous devons déterminer ces dérivées en appliquant la définition de fonction dérivée.

NOTE

Le mathématicien suisse Leonhard Euler (NH Euler01) a choisi la première lettre de son nom pour désigner la base des logarithmes naturels.

Ce nombre que l'on rencontre dans un taux d'intérêt composé continûment (NH Euler02) est également la base d'une fonction exponentielle qui joue un rôle important en calcul différentiel (NH Euler03).

DerivExponentielle_01

DerivExponentielle_02

Théorème du sandwich

En appliquant la définition de la dérivée d'une fonction, il faut évaluer une limite de la forme 0/0. Dans le cas des fonctions algébriques, on peut lever une indétermination de la forme 0/0 par une procédure algébrique. Dans le cas d'une fonction transcendante $f(x)$, il faut parfois avoir recours à un théorème appelé **Théorème du sandwich**. L'idée de ce théorème est la suivante :

Soit une fonction $f(x)$, un intervalle ouvert $]c; d[$ et une valeur a telle que $a \in\,]c; d[$, où la fonction f peut avoir une discontinuité de la forme 0/0.

Si on peut déterminer deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ telles que les images par la fonction f sont toujours comprises entre celles par la fonction g et celles par la fonction h sur l'intervalle ouvert $]c; d[$ contenant a, c'est-à-dire $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in\,]c; d[$ et que les deux fonctions f et g ont la même limite L lorsque x tend vers a, alors la limite de f lorsque x tend vers a est égale à L.

La démonstration rigoureuse de ce théorème dépasse les objectifs du cours, nous l'accepterons sans démonstration.

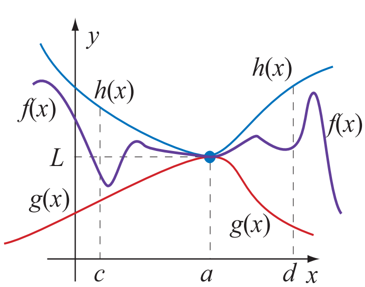
THÉORÈME

du sandwich

Soit f, g et h trois fonctions telles que :

- $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, pour tout x sur un intervalle ouvert $]c; d[$, sauf peut-être en $x = a$;
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$;

alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L.$.



La figure ci-contre illustre l'idée de ce théorème.

Pour déterminer la dérivée de la fonction exponentielle de base e, nous aurons à utiliser une limite particulière, soit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

THÉORÈME

Pente de la tangente à l'exponentielle de base *e* en (0; 1)

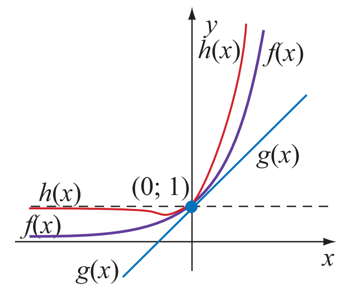
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

REMARQUE
Cette limite peut être estimée numériquement. On utilise ici le théorème du sandwich pour l'obtenir analytiquement.

Démonstration

Considérons la fonction $g(x) = x + 1$ dont les images sont toujours plus petites que celles de $f(x) = e^x$ et la fonction $h(x) = xe^x + 1$ dont les images sont toujours plus grandes que celles de $f(x)$. Toutes ces fonctions passent au point (0; 1). On a $g(x) \le f(x) \le h(x)$, ce qui donne :

$$x + 1 \le e^x \le xe^x + 1.$$



En soustrayant 1 de chacun des membres, on obtient :

$$x \le e^x - 1 \le xe^x.$$

Si $x < 0$, en divisant chacun des membres par x, on obtient :

$$1 \ge \frac{e^x - 1}{x} \ge e^x.$$

En considérant la limite lorsque x tend vers 0, on a alors :

$$1 \ge \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \ge \lim_{x \to 0} e^x.$$

$$1 \ge \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \ge 1.$$

Si $x > 0$, en divisant chacun des membres par x, on obtient :

$$1 \le \frac{e^x - 1}{x} \le e^x.$$

$$1 \le \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \le \lim_{x \to 0} e^x.$$

$$1 \le \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \le 1.$$

Par conséquent : $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

EMARQUE
Cette limite représente la pente de la tangente à la courbe de $f(x) = e^x$ au point (0; 1). En effet :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

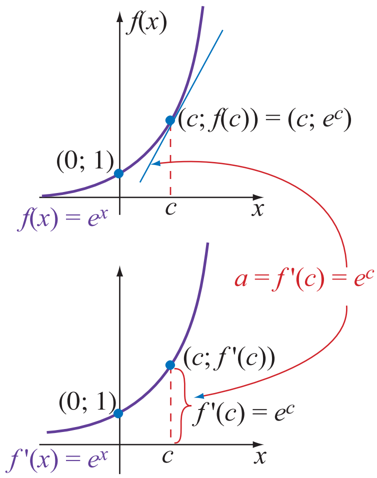
Fonction exponentielle

THÉORÈME

Dérivée de la fonction exponentielle de base *e*

Si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.

DerivExponentielle_01



TIC

On peut faire tracer la fonction et sa dérivée par Maple avec les instructions suivantes :

```
> f:=x->exp(x);
  df:=D(f);
  plot({f(x),g(x)},x=-2..4,
  y=- 1..20,thickness=3);
```

Démonstration

Par définition de la dérivée d'une fonction, on a :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h}.$$

Puisque e^x est constant par rapport à la variation de h, on a :

$$f'(x) = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \times 1 = e^x.$$

En exprimant ce résultat dans la notation de l'opérateur de dérivation,

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

La fonction exponentielle de base e est très intéressante puisqu'elle est sa propre dérivée. C'est donc dire que le taux de variation ponctuel au point d'abscisse c est égal à l'image de c par la fonction f. C'est la seule fonction, avec les multiples de la forme $f(x) = ke^x$, à avoir cette particularité. La figure ci-contre illustre cette caractéristique de la fonction exponentielle de base e.

REMARQUE

Les règles de dérivation que nous avons démontrées précédemment sont valides lorsque l'une des composantes est une exponentielle ou une logarithmique.

DerivExponentielle_03

EXEMPLE 4.1.1

Déterminer la dérivée des fonctions :

a) $f(x) = x^3 + e^x$ b) $f(x) = x^3e^x$ c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

Solution

a) La fonction est de la forme $f = u + v$ où $u = x^3$ et $v = e^x$. La dérivée d'une somme de fonctions est égale à la somme des dérivées des fonctions, soit $(u + v)' = u' + v'$. En utilisant la notation des opérateurs, on a :

$$\frac{d}{dx}(x^3+e^x) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(e^x).$$

Par la dérivée d'une fonction puissance, on a :

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2.$$

et la dérivée de la fonction exponentielle de base e est :

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

On a donc : $\dfrac{d}{dx}(x^3+e^x) = \dfrac{d}{dx}(x^3) + \dfrac{d}{dx}(e^x) = 3x^2 + e^x.$

et la fonction dérivée est $f'(x) = 3x^2 + e^x$.

b) La fonction est de la forme $f = uv$. On doit donc faire la dérivée du produit des fonctions $u(x) = x^3$ et $v(x) = e^x$. Puisque :

$$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{d}{dx}(u) + u\frac{d}{dx}(v),$$

on a en substituant :

$$\frac{d}{dx}(x^3e^x) = e^x\frac{d}{dx}(x^3) + x^3\frac{d}{dx}(e^x)$$
$$= e^x \times 3x^2 + x^3e^x = x^2e^x(3+x).$$

La fonction dérivée est donc $f'(x) = x^2e^x(3 + x)$.

c) La fonction est de la forme $f = u/v$. On doit donc faire la dérivée du quotient des fonctions $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2$. En utilisant la notation des opérateurs, on a :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = \frac{x^2\frac{d}{dx}(e^x) - e^x\frac{d}{dx}(x^2)}{x^4} = \frac{x^2 \times e^x - e^x \times 2x}{x^4}$$
$$= \frac{xe^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}.$$

La fonction dérivée est donc $f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$.

EXEMPLE 4.1.2

Soit la fonction définie par $f(x) = x - e^x$.

a) Déterminer la fonction dérivée.

b) Déterminer l'équation de la droite tangente au graphique au point d'abscisse $x = 1$.

c) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente est horizontale.

d) Identifier les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

Solution

a) En utilisant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(x - e^x) = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(e^x) = 1 - e^x.$$

La fonction dérivée est $f'(x) = 1 - e^x$.

b) L'ordonnée du point d'abscisse 1 est :

$$f(1) = 1 - e^1 = 1 - e.$$

La pente de la tangente en ce point est :

$$f'(1) = 1 - e^1 = 1 - e.$$

L'équation de la droite est donc de la forme $y = (1 - e)x + b$ et, en substituant les coordonnées du point, on trouve :

$$1 - e = (1 - e)(1) + b.$$

ce qui donne $b = 0$. L'équation de la tangente est donc :

$$y = (1 - e)x.$$

c) La tangente est horizontale lorsque la dérivée s'annule. On cherche donc les valeurs de x pour lesquelles :

$$f'(x) = 1 - e^x = 0,$$

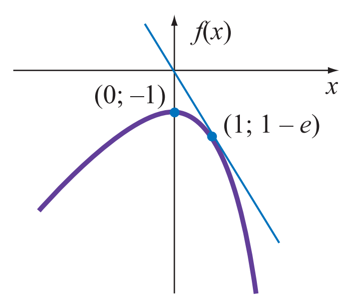
ce qui donne $e^x = 1$ et $x = \ln 1 = 0$.

La tangente est donc horizontale à $x = 0$.

EMARQUE

Tout comme pour les fonctions polynomiales, on peut trouver l'équation de la tangente en un point de la courbe représentant une fonction transcendante.

DerivExponentielle_04

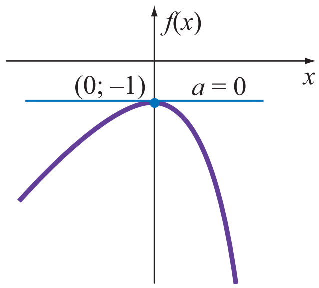


TIC

```
> f:=x->10*x^2/exp(x);
> plot(f(x),x=-6..4);
```

Pour déterminer la dérivée :

```
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```



d) Puisque la dérivée s'annule seulement à 0, il n'y a que deux intervalles à considérer, soit les intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; \infty[$. On peut évaluer la dérivée en un point de chacun de ces intervalles pour savoir si la pente des tangentes est positive ou négative. Dans l'intervalle $]-\infty; 0[$, considérons le point d'abscisse –1 (ou n'importe quel autre). En ce point, la pente de la tangente est :

$$f'(-1) = 1 - e^{-1} = 0{,}6321 > 0.$$

La pente de la tangente étant positive dans cet intervalle, la fonction est croissante.

Dans l'intervalle $]0; \infty[$, considérons le point d'abscisse 1 (ou n'importe quel autre). En ce point, la pente de la tangente est :

$$f'(1) = 1 - e^{1} = -1{,}718 < 0.$$

La pente de la tangente étant négative dans cet intervalle, la fonction est décroissante. La fonction est donc croissante dans l'intervalle $]-\infty; 0[$ et décroissante dans l'intervalle $]0; \infty[$. Ce que confirme le graphique donné ci-contre. On peut également vérifier ce résultat à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel.

EXEMPLE 4.1.3

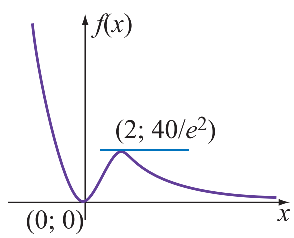
DerivExponentielle_05

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{10x^2}{e^x}$.

a) Déterminer les points où la dérivée s'annule.

b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

Solution



a) Déterminons d'abord la dérivée. Puisque la fonction est définie par un quotient de fonctions, on applique la règle du quotient,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{10x^2}{e^x}\right) = \frac{e^x \frac{d}{dx}\left(10x^2\right) - 10x^2 \frac{d}{dx}\left(e^x\right)}{\left(e^x\right)^2}$$

$$= \frac{e^x \times 20x - 10x^2 \times e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x\left(20x - 10x^2\right)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{20x - 10x^2}{e^x}.$$

Le dérivée s'annule lorsque $10x(2 - x) = 0$. On trouve $x = 0$ et $x = 2$.

b) Les zéros de la fonction dérivée déterminent trois intervalles :

$$]-\infty; 0[,\ ]0; 2[\text{ et }]2; \infty[.$$

Puisque $f'(-1) = \dfrac{(20 \times -1) - 10(-1)^2}{e^{-1}} = \dfrac{-30}{e^{-1}} < 0.$ la fonction est décroissante dans l'intervalle $]-\infty; 0[$.

Puisque $f'(1) = \dfrac{(20 \times 1) - 10(1)^2}{e^{1}} = \dfrac{10}{e^{1}} > 0.$ la fonction est croissante dans l'intervalle $]0; 2[$.

TIC

> f:=x->10*x^2/exp(x);

> plot(f(x),x=-3..3);

Le graphique n'est pas convaincant? Changer l'intervalle représenté pour [–1; 3].

Pas encore très élégant, changer pour [–1; 10].

Pour déterminer la dérivée :

> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);

Puisque $f'(3) = \dfrac{(20 \times 3) - 10(3)^2}{e^3} = \dfrac{-30}{e^3} < 0$, la fonction est décroissante dans l'intervalle $]2; \infty[$.

Fonction logarithmique

Pour déterminer la dérivée de la fonction logarithmique de base e, nous aurons également besoin d'une limite particulière. Soit :

$$\lim_{z \to \pm\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z.$$

Nous allons procéder par une approche numérique pour estimer cette limite.

LIMITE PARTICULIÈRE			
$x \to -\infty$	$\ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$	$x \to \infty$	$\ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$
–10	1,05360516	10	0,95310180
–100	1,00503359	100	0,99503309
–1 000	1,00050033	1 000	0,99950033
–10 000	1,00005000	10 000	0,99995000
–100 000	1,00000500	100 000	0,99999500
–1 000 000	1,00000050	1 000 000	0,99999950
–10 000 000	1,00000005	10 000 000	0,99999995
–100 000 000	1,00000001	100 000 000	0,99999999
Valeur estimée	1	Valeur estimée	1

Nous admettrons donc que :

$$\lim_{z \to -\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 1 \text{ et } \lim_{z \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 1.$$

THÉORÈME

Dérivée de la fonction logarithmique de base *e*

Si $f(x) = \ln x$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration

Par définition de la dérivée d'une fonction, on a :

EMARQUE

Leonhard Euler a montré que la fonction :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$$

avait une asymptote horizontale et a noté $y = e$, cette asymptote. L'asymptote horizontale étant la limite à l'infini, on a :

$$\lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e.$$

DerivLogarithmique_01

TIC

On peut vérifier ces résultats avec Maple en donnant les instructions suivantes :

```
> Limit(ln((1+1/z)^z),z=infinity)
  =limit(ln((1+(1/z))^z),z=infinity);
```

et :

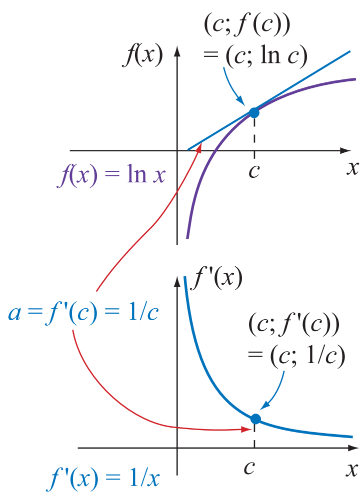
```
> Limit((1+1/z)^z,z=infinity)
  =limit((1+(1/z))^z,z=infinity);
```

Pour vérifier à moins l'infini, on ajoute le signe devant « infinity ».

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h}.$$

DerivExpLog_03



TIC
On peut faire tracer la fonction et sa dérivée par Maple avec les instructions suivantes :

```
> f:=x->ln(x);
  df:=D(f);
  g:=simplify(df(x));
  plot({f(x),g(x)},x=0..4,
   y=-4..10,thickness=3);
```

Pour pouvoir évaluer cette limite, nous allons procéder à un changement de variable. Posons :

$$\frac{1}{z} = \frac{h}{x}, \text{ d'où } h = \frac{x}{z}.$$

Lorsque $h \to 0,\ z = \dfrac{x}{h} \to \pm\infty$. On a donc :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{z\to\pm\infty} \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{z}\right)}{\dfrac{x}{z}}$$

$$= \lim_{z\to\pm\infty} \frac{z}{x} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{x} \lim_{z\to\pm\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z.$$

Puisque : $\displaystyle\lim_{z\to\pm\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = 1,$ on obtient :

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lim_{z\to\pm\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \frac{1}{x}$$

En exprimant ce résultat dans la notation de l'opérateur de dérivation,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Il est à remarquer que le domaine de la fonction dérivée est toujours inclus dans le domaine de la fonction. Ainsi, même si l'expression $1/x$ est définie pour des valeurs négatives de x, ces valeurs ne font pas partie du domaine de la fonction dérivée.

EXEMPLE 4.1.4

Déterminer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = x^2 \ln x$.

Solution

La fonction est de la forme $f = uv$. On doit donc faire la dérivée du produit des fonctions $u(x) = x^2$ et $v(x) = \ln x$. Puisque :

$$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{d}{dx}(u) + u\frac{d}{dx}(v),$$

on a, en substituant :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) &= \ln x \frac{d}{dx}(x^2) + x^2 \frac{d}{dx}(\ln x)\\ &= (\ln x)\times 2x + x^2 \times \frac{1}{x}\\ &= 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1).\end{aligned}$$

La fonction dérivée est donc $f'(x) = x(1 + 2\ \ln x)$.

Retour sur l'apprentissage

Jusqu'à maintenant, nous avons présenté la dérivée de quelques fonctions élémentaires et les règles de dérivation des opérations arithmétiques. Ces dérivées et règles de dérivation nous permettent de dériver un grand nombre de fonctions. Nous verrons comment dériver les fonctions composées au chapitre 5 et les fonctions trigonométriques à la section 4.3.

Les deux tableaux ci-dessous donnent un résumé des dérivées et techniques de dérivation présentées jusqu'à maintenant.

RÉSUMÉ DES DÉRIVÉES ÉLÉMENTAIRES	
Notation fonctionnelle	Opérateur de dérivation
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
$(e^x)' = e^x$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

PROPRIÉTÉS DE LA DÉRIVÉE	
Notation fonctionnelle	Opérateur de dérivation
$(u+v)' = u' + v'$	$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
$(u-v)' = u' - v'$	$\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$
$(kv)' = kv'$	$\frac{d}{dx}(kv) = k\frac{dv}{dx}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

4.2 Exercices

À l'aide des techniques de dérivation, trouver la dérivée des fonctions suivantes et donner le résultat sous forme simplifiée :

1. $f(x) = x^2 + e^x$
2. $f(x) = 3x^2 + \ln x$
3. $f(x) = x^3\, e^x$
4. $f(x) = x^3 \ln x$
5. $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$
6. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$
7. $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}$
8. $f(x) = \dfrac{x^2 - e^x}{\ln x}$
9. Soit $y = \left(\dfrac{t^2 - 5t}{e^t}\right)$, déterminer $\dfrac{dy}{dt}$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_1$.
10. Soit $y = \left(\dfrac{e^t}{t^2 - 5t}\right)$, déterminer $\dfrac{dy}{dt}$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_1$.
11. Soit $y = t^3 e^t$, déterminer t tel $\dfrac{dy}{dt} = 0$. Calculer :

    $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_1$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{-1}$.
12. Soit $y = \dfrac{t^3}{e^t}$, déterminer t tel que $\dfrac{dy}{dt} = 0$.

    Calculer $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_1$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{-1}$.
13. Soit $y = \dfrac{t^3 + t^2}{e^t}$, déterminer pour quelles valeurs de t la tangente à la courbe est horizontale.

    Calculer $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_2$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_1$.
14. Soit la fonction définie par $f(x) = x\,e^x$.
    a) Déterminer la fonction dérivée.
    b) Déterminer l'équation de la droite tangente au graphique au point d'abscisse $x = 1$.
    c) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente est horizontale.
    d) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
15. Soit la fonction définie par $f(x) = x \ln x$.
    a) Déterminer la fonction dérivée.
    b) Trouver l'équation de la droite tangente au graphique au point d'abscisse $x = 2$.
    c) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente est horizontale.
    d) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
16. Soit la fonction définie par $f(x) = x^2 \ln x$.
    a) Déterminer la fonction dérivée.
    b) Déterminer l'équation de la droite tangente au graphique au point d'abscisse $x = 1$.
    c) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente est horizontale.
    d) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
17. Soit la fonction définie par $f(x) = x/e^x$.
    a) Déterminer la fonction dérivée.
    b) Déterminer l'équation de la droite tangente au graphique au point d'abscisse $x = 2$.
    c) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente est horizontale.
    d) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
18. Soit la fonction définie par $f(x) = xe^x + 1$
    a) Déterminer la fonction dérivée.
    b) Déterminer l'équation de la droite tangente au graphique au point d'abscisse $x = 1$.
    c) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente est horizontale.
    d) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
19. Montrer, en utilisant le fait que $e^{-x} = 1/e^x$ et en appliquant la règle du quotient, que :

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = -\left(e^{-x}\right).$$

20. Montrer, en appliquant la règle du produit, que :
    a) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{2x}\right) = 2e^{2x}$
    b) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{3x}\right) = 3e^{3x}$
21. Montrer que :
    a) $\dfrac{d}{dx}\left((\ln x)^2\right) = \dfrac{2\ln x}{x}$

b) $\frac{d}{dx}\left((\ln x)^3\right)=\frac{3(\ln x)^2}{x}$

c) $\frac{d}{dx}\left(\ln x^2\right)=\frac{2}{x}$

d) $\frac{d}{dx}\left(\ln x^3\right)=\frac{3}{x}$

22. En utilisant les résultats du numéro précédent, déterminer les zéros de la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^2e^{2x}$

b) $f(x) = (x^3 - 2x^2)e^{3x}$

c) $f(x) = x^3 \ln x^2$

d) $f(x) = x^2(\ln x)^3$

e) $f(x)=\frac{x^3}{e^{2x}}$

f) $f(x)=\frac{(\ln x)^3}{e^{2x}}$

g) $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{e^{2x}}$

h) $f(x)=\frac{(\ln x)^3}{\ln x^3}$

i) $f(x)=\frac{e^{3x}}{\ln x}$

23. La procédure de mise en marche d'une machine dure 5 minutes. La puissance nécessaire à l'opération durant cet intervalle de temps est :

$$P(t)=\frac{400t}{e^t}\text{ W},$$

où P est en watts (W) et le temps t est en minutes.

a) Déterminer la fonction décrivant le taux de variation instantané de la puissance durant la période de mise en marche.

b) Calculer le taux de variation de la puissance à l'instant où le système est mis en marche.

c) Calculer le taux de variation de la puissance 30 secondes après la mise en marche, 2 minutes après la mise en marche, 4 minutes après la mise en marche. Interpréter ces résultats dans le contexte.

d) À quel moment le taux de variation est-il nul? Comment interpréter le fait que le taux de variation s'annule?

e) Déterminer, au cours de ces cinq minutes, l'intervalle de temps durant lequel la puissance requise est croissante et l'intervalle de temps durant lequel la puissance requise est décroissante.

f) Déterminer un modèle d'approximation affine de la puissance au temps $t = 2$.

g) À l'aide de ce modèle, estimer la puissance 3 minutes après la mise en marche du système.

h) Estimer la variation de la puissance dans l'intervalle de temps de 2 minutes à 2 minutes et demie.

i) Déterminer la différentielle de la puissance dans l'intervalle [0; 0,5]

24. On estime que la puissance requise pour opérer un appareil durant la période transitoire qui suit sa mise en marche est décrite en fonction du temps par :

$$P(t)=\frac{600t^2}{e^t}\text{ W},$$

où P est en watts (W) et le temps t est en minutes. Cette période transitoire dure 8 minutes, après quoi la puissance requise demeure constante.

a) Déterminer la fonction décrivant le taux de variation de la puissance durant la période de mise en marche.

b) Calculer le taux de variation de la puissance à l'instant où le système est mis en marche.

c) Calculer le taux de variation de la puissance une minute après la mise en marche, trois minutes après la mise en marche, quatre minutes après la mise en marche. Interpréter ces résultats selon le contexte.

d) À quel moment le taux de variation est-il nul? Comment interpréter le fait que le taux de variation s'annule?

e) Déterminer, au cours de ces huit minutes, l'intervalle de temps durant lequel la puissance requise est croissante et l'intervalle de temps durant lequel la puissance requise est décroissante.

f) Déterminer un modèle d'approximation affine de la puissance au temps $t = 3$.

g) À l'aide de ce modèle, estimer la puissance 3,5 minutes après la mise en marche du système.

h) Estimer la variation de la puissance dans les intervalles [1; 1,25], [1; 1,5] et [4; 4,25].

25. La concentration en parties par million d'un médicament dans le sang, t heures après son absorption a été modélisée par :

$$C(t) = 10t^2e^{-t}$$

a) Déterminer le taux de variation de la concentration une heure après l'absorption.

b) Déterminer à quel moment le taux de variation de la concentration est nul. Quelle interprétation faut-il donner à ce taux de variation selon le contexte?
c) Déterminer l'intervalle durant lequel la concentration est croissante. Décroissante.

26. On a réalisé une expérience dans laquelle on montrait pendant un laps de temps un ensemble d'objets à des personnes en leur demandant de garder en mémoire le plus longtemps possible les objets visualisés. On a par la suite modélisé le pourcentage de personnes qui étaient en mesure de nommer tous les objets après t minutes. On a obtenu le modèle :

$$R(t) = 90 - 30 \ln t.$$

a) Quel pourcentage des personnes pouvait nommer tous les objets après une minute?
b) Déterminer la dérivée de cette fonction.
c) Calculer le taux de variation à 2 min. Interpréter ce taux de variation selon le contexte.
d) Calculer le taux de variation à 4 min. Interpréter ce taux de variation selon le contexte.
e) Déterminer un modèle d'approximation affine au voisinage de 3 s.

Exercices synthèse

1. Soit la fonction définie par :

$$f(x) = 4e^{1/x}.$$

a) Déterminer par des calculs successifs le comportement de la fonction au voisinage de $x = 0$.
b) Déterminer par des calculs successifs le comportement de la fonction lorsque x prend des valeurs très grandes positivement.
c) Déterminer par des calculs successifs le comportement de la fonction lorsque x prend des valeurs très grandes négativement.

2. Soit la fonction définie par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

Déterminer par des calculs successifs le comportement de la fonction au voisinage de 0. Décrire symboliquement ce comportement.

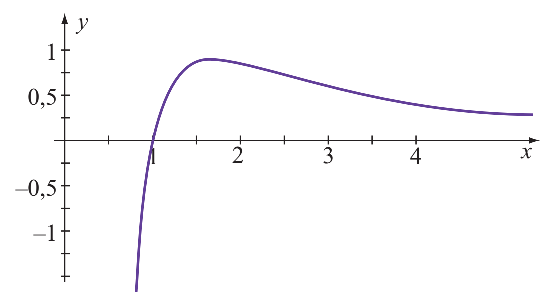
3. Soit la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x^2-1}{e^x}$$

a) Déterminer les points où la dérivée s'annule.
b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
c) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

4. Le graphique suivant est celui de la fonction définie par la règle de correspondance

$$f(x)=\frac{5\ln x}{x^2}$$



a) Déterminer les points où la dérivée s'annule.
b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

5. Soit la fonction définie par la règle de correspondance

$$f(x)=\frac{x^2-\ln x}{x}$$

a) Déterminer les points où la dérivée s'annule.
b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

4.3 Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques sont des fonctions transcendantes. Il n'est donc pas possible, par des manipulations algébriques, de lever l'indétermination rencontrée lorsqu'on veut en déterminer la fonction dérivée. Nous devrons d'abord déterminer deux limites particulières.

Limites particulières

Nous utiliserons à nouveau le théorème du sandwich pour évaluer les limites particulières qui nous permettront de déterminer la dérivée des fonctions sinus et cosinus.

THÉORÈME

Pente de la tangente à la fonction sinus en (0; 0)

La pente de la tangente à $f(x) = \sin x$ au point (0; 0) est :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1.$$

DerivTrigo01

Démonstration

La pente de la tangente à la courbe de $f(x) = \sin x$ au point (0; 0) est donnée par :

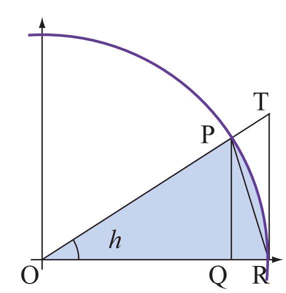
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h)-\sin 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.$$

Montrons que cette limite est égale à 1.

Supposons que h est un angle positif plus petit que $\pi/2$ dans un cercle trigonométrique. La figure ci-contre nous permet de constater que l'aire du secteur OPR d'angle au centre h est plus grande que l'aire du triangle OPQ et plus petite que l'aire du triangle OTR, soit :

$$A_{\text{OPQ}} \le A_{\text{OPR}} \le A_{\text{OTR}}$$

$$\text{or, } A_{\text{OPQ}} = \frac{1}{2}\sin h\cos h,\ A_{\text{OPR}} = \frac{h}{2} \text{ et } A_{\text{OTR}} = \frac{1}{2}\tan h.$$



On a donc l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2}\sin h\cos h \le \frac{h}{2} \le \frac{1}{2}\tan h.$$

En multipliant par 2 et divisant par $\sin h$, où $\sin h > 0$, on obtient :

$$\frac{\sin h\cos h}{\sin h} \le \frac{h}{\sin h} \le \frac{\tan h}{\sin h}$$

et :

$$\cos h \le \frac{h}{\sin h} \le \frac{1}{\cos h}.$$

Les fonctions $\cos h$ et $1/\cos h$ sont continues au voisinage de 0 et, en appliquant le théorème du sandwich, on a :

$$\lim_{h\to 0^+}\cos h \le \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{\sin h} \le \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\cos h}$$

et : $$1 \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{\sin h} \leq 1.$$

On obtient donc que : $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{h}{\sin h} = 1$

et : $$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sin h}{h} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{h}{\sin h}} = 1.$$

On procède de façon analogue pour montrer que $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{\sin h}{h} = 1$.
Puisque la limite à gauche est égale à la limite à droite, on peut écrire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

THÉORÈME

Pente de la tangente à la fonction cosinus en (0; 1)

La pente de la tangente à $f(x) = \cos x$ au point (0; 1) est :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

Démonstration

La pente de la tangente à la courbe de $f(x) = \cos x$ au point (0; 1) est donnée par :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(0 + h) - \cos(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}.$$

Montrons maintenant que cette limite est 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \times \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin h}{h} \times \frac{-\sin h}{\cos h + 1} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \times \lim_{h \to 0} \frac{-\sin h}{\cos h + 1} \\
&= 1 \times \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

On obtient donc que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.

Dérivée des fonctions sinus et cosinus

En utilisant la fonction sinus et la fonction cosinus, on peut exprimer les autres fonctions trigonométriques comme des quotients de fonctions. Nous présentons dans les deux prochains théorèmes la dérivée de la fonction sinus et de la fonction cosinus. Celle des autres fonctions est laissée en exercices.

THÉORÈME

Dérivée de la fonction sinus

Si $f(x) = \sin x$ alors $f'(x) = \cos x$.

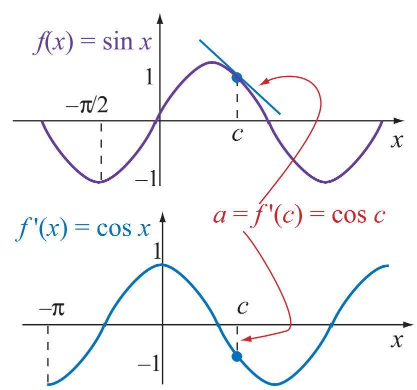
DerivTrigo02

Démonstration

Par définition de la dérivée d'une fonction, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h-\sin x+\cos x\sin h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right) \\ &= \sin x\times\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x\times 0+\cos x\times 1 \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Tic
```
> f:=x->sin(x);
> df:=D(f);
> g:=simplify(df(x));
> plot({f(x),g(x)},x=-
1..12,y=-    1..1,thickness=2);
```



La dérivée de la fonction $f(x) = \sin x$ est donc $f'(x) = \cos x$.

En exprimant ce résultat avec la notation de l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

THÉORÈME

Dérivée de la fonction cosinus

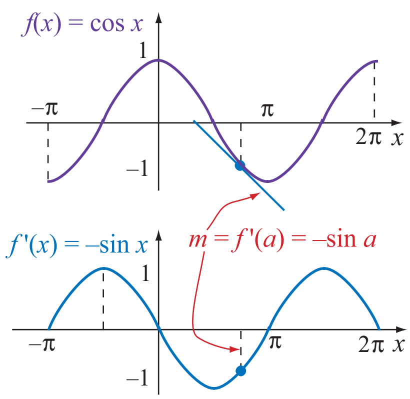
Si $f(x) = \cos x$ alors $f'(x) = -\sin x$.

DerivTrigo03

Démonstration

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

Tic
```
> f:=x->cos(x);
> df:=D(f);
> g:=simplify(df(x));
> plot({f(x),g(x)},x=-1..12,y=-
1..1,thickness=2);
```



$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \cos x - \sin x \sin h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \frac{\sin x \sin h}{h} \right)$$
$$= \cos x \times \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \sin x \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$
$$= \cos x \times 0 - \sin x \times 1$$
$$= -\sin x.$$

La dérivée de la fonction $f(x) = \cos x$ est donc $f'(x) = -\sin x$.

En exprimant ce résultat avec la notation de l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$$

Les règles de dérivation que nous avons présentées dans les chapitres précédents sont valides pour toutes les fonctions dérivables. On peut donc appliquer les mêmes procédures de dérivation que précédemment.

EXEMPLE 4.3.1

DerivTrigo04

Trouver la dérivée de la fonction définie par $f(x) = \tan x$.

Solution

La fonction tangente est le quotient de deux fonctions : la fonction sinus et la fonction cosinus. En effet :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Dans ce quotient, $u = \sin x$ et $v = \cos x$. En dérivant ces fonctions,

$$\frac{du}{dx} = \cos x \text{ et } \frac{dv}{dx} = -\sin x.$$

La règle de dérivation du quotient donne alors :

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

On obtient donc $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$.

Tic
```
f:=t->(20-t)*cos(t);
> plot(f(t),t=0..20);
> df=diff(f(t),t);
```

En procédant comme à l'exemple 4.3.1, on obtient la dérivée des autres fonctions trigonométriques.

DÉRIVÉE

Fonctions trigonométriques

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \ \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \ \cot x$$

Applications

EXEMPLE 4.3.2

DerivTrigo05

Soit la fonction définie par $f(x) = \sin x$.

a) Trouver la fonction dérivée.

b) Trouver l'équation de la droite tangente au graphique au point d'abscisse $x = \pi/6$.

c) Trouver en quels points la tangente est horizontale dans l'intervalle $[0; 4\pi]$.

d) Identifier les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f dans l'intervalle $[0; 4\pi]$.

Solution

a) La fonction dérivée est :

$$f'(x) = \cos x.$$

b) L'ordonnée du point d'abscisse $\pi/6$ est :

$$f(\pi/6) = \sin \pi/6 = 0{,}5.$$

La pente de la tangente en ce point est :

$$f'(\pi/6) = \cos \pi/6 = 0{,}866.$$

L'équation de la droite est donc de la forme :

$$y = 0{,}866x + b$$

et en substituant les coordonnées du point $(\pi/6; 0{,}5)$, on trouve :

$$0{,}5 = 0{,}866 \times \pi/6 + b,$$

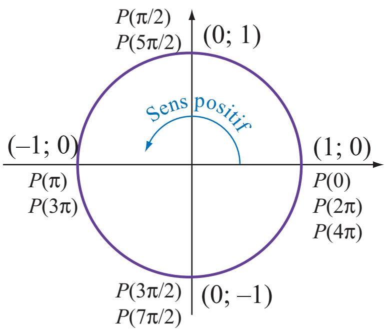
ce qui donne $b = 0{,}0466$. L'équation de la tangente est donc :

$$y = 0{,}866x + 0{,}0466.$$

c) La tangente est horizontale lorsque la dérivée s'annule. On cherche donc les valeurs de x pour lesquelles :

$$f'(x) = \cos x = 0.$$

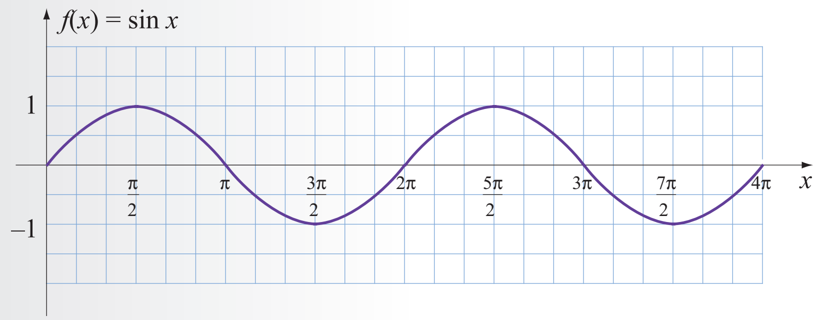
Le plus simple pour trouver toutes les valeurs de x dans l'intervalle $[0; 4\pi]$ pour lesquelles $\cos x$ s'annule, et être certain de ne pas en



Tic
f:=x->sin(x);
> plot(f(x),x=0..4*Pi);
Pour déterminer la dérivée :
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);

oublier, c'est d'avoir recours au cercle trigonométrique. On constate que, dans l'intervalle [0; 4π], la dérivée s'annule pour des angles de π/2 rad, 3π/2 rad, 5π/2 rad et 7π/2 rad.

d) Le cercle trigonométrique permet de voir assez simplement que dans l'intervalle [0; π/2[, le cosinus est positif; la fonction dérivée du sinus est donc positive et la fonction sinus est croissante. De la même façon, on trouve que la fonction sinus est décroissante dans l'intervalle]π/2; 3π/2[, croissante dans l'intervalle]3π/2; 5π/2[, décroissante dans l'intervalle]5π/2; 7π/2[et croissante dans l'intervalle]7π/2; 4π[. Le graphique de la fonction sinus, ci-dessous, confirme les résultats obtenus à l'aide de la fonction dérivée.



EXEMPLE 4.3.3

On a modélisé la position p (cm) d'une masse en oscillation amortie par rapport à son point d'équilibre par :

$$p(t) = (20 - t) \cos t \text{ cm}$$

où t est le temps en secondes. On considère que ce modèle est valide dans l'intervalle [0; 20].

a) Déterminer un modèle d'approximation affine de cette fonction en considérant le point d'abscisse $c = 1$ comme centre d'approximation.
b) Utiliser ce modèle pour estimer la position de la masse à 1,5 s.
c) Déterminer la différentielle de la position dans les intervalles [1; 1,25] et [4; 4,5]. Interpréter les résultats.

DerivTrigo07SCN

Solution

a) Le modèle d'approximation affine est donné par :

$$L(t) = p(c) + p'(c)(t - c).$$

Dans le cas présent, on a :

$$p(1) = (20 - 1) \cos 1 = 10{,}27 \text{ cm}.$$

En appliquant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\begin{aligned} p'(t) &= \frac{d}{dt}\big((20-t)\cos t\big) = \cos t\frac{d}{dt}(20-t) + (20-t)\frac{d}{dt}(\cos t) \\ &= \cos t \times -1 + (20-t)\times(-\sin t) \\ &= -\cos t - (20-t)\sin t. \end{aligned}$$

La dérivée est donc :

$$p'(t) = -\cos t - (20 - t) \sin t.$$

Le taux de variation instantané à $t = 1$ est :

$$p'(1) = -\cos 1 - (20 - 1) \sin 1 = -16{,}53 \text{ cm/s}.$$

Le modèle d'approximation affine est donc :

$$L(t) = 10{,}27 - 16{,}53(t - 1).$$

b) L'estimation de la position à 1,5 s est alors :

$$L(1{,}5) = 10{,}27 - 16{,}53(1{,}5 - 1) = 2{,}005 \text{ cm}.$$

c) La différentielle en un point $(c; f(c))$ est donnée par :

$$dp|_c = p'(c)\, dt.$$

En considérant $c = 1$, on a alors :

$$dp|_1 = -16{,}53\, dt.$$

Dans l'intervalle [1; 1,25], on a $dt = 0{,}25$ et :

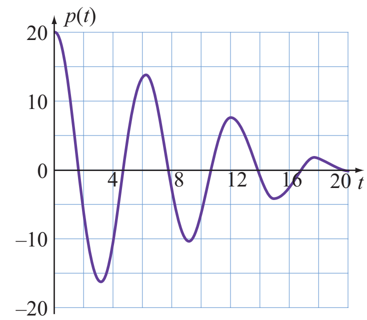
$$dp|_{1;\,0,25} = -16{,}53 \text{ cm/s} \times 0{,}25 \text{ s} = -4{,}13 \text{ cm}.$$

La fonction décrivant la position de la masse diminue de 4,13 cm.

Dans l'intervalle [4; 4,5], on a $dt = 0{,}5$ et :

$$dp|_{4;\,0,5} = 12{,}76 \text{ cm/s} \times 0{,}5 \text{ s} = 6{,}38 \text{ cm}.$$

La position de la masse augmente de 6,38 cm.



EXEMPLE 4.3.4

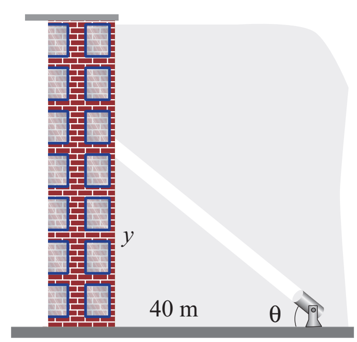
Le faisceau lumineux d'un projecteur en mouvement balaie le mur d'un édifice commercial situé à 40 m.

a) Décrire la relation entre la hauteur y atteinte par le faisceau et l'angle qu'il fait avec l'horizontale.

b) Déterminer la relation décrivant le taux de variation de la hauteur par rapport à l'angle θ.

c) Calculer le taux de variation de la hauteur lorsque l'angle d'élévation est de 30°. Lorsque la hauteur du faisceau est de 30 m. Exprimer ces résultats en mètres par degré.

DerivTrigo08



Solution

a) Dans le triangle ABC formé par le sol, l'édifice et le faisceau lumineux, on a :

$$\tan\theta = \frac{y}{40} \text{ et } y = 40 \tan\theta.$$

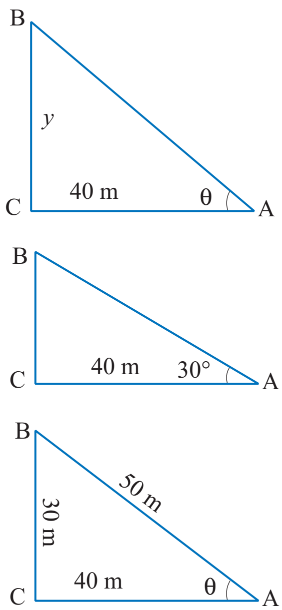
b) On obtient la relation en dérivant par rapport à θ. Cela donne :

$$\frac{d}{d\theta}(y) = \frac{d}{d\theta}(40\tan\theta) = 40\frac{d}{d\theta}(\tan\theta) = 40\sec^2\theta.$$

La relation cherchée est

$$\frac{dy}{d\theta} = 40\sec^2\theta.$$

c) Pour calculer le taux de variation, il faut déterminer sec θ.



Lorsque θ = 30°, on a :

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Le taux de variation est alors :

$$\left.\frac{dy}{d\theta}\right|_{\theta=\pi/6} = 40\sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 40\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{160}{3}\ \frac{\text{mètres}}{\text{radian}}.$$

D'où :

$$\left.\frac{dy}{d\theta}\right|_{\theta=\pi/6} = \frac{160}{3}\ \frac{\text{mètres}}{\text{radian}} \times \frac{\pi}{180}\ \frac{\text{radians}}{\text{degré}} = \frac{8\pi}{27}\ \frac{\text{mètres}}{\text{degré}} \approx 0{,}930\ \text{ m/°}.$$

Lorsque y = 30 m, on utilise le théorème de Pythagore pour trouver l'hypoténuse et on trouve 50 m. On a alors :

$$\sec\theta = 50/40 = 5/4,$$

d'où : $$\left.\frac{dy}{d\theta}\right|_{y=30} = 40\times\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 62{,}5\ \frac{\text{mètres}}{\text{radian}} \approx 1{,}091\ \text{ m/°}.$$

Retour sur l'apprentissage

Pour déterminer la dérivée des fonctions sinus et cosinus, nous avons d'abord déterminé des limites particulières qui donnaient la pente de la tangente au point d'abscisse 0 pour chacune de ces fonctions. Puis, en utilisant les identités trigonométriques et ces limites particulières, nous avons déterminé la fonction dérivée de chacune de ces fonctions. Grâce aux identités trigonométriques fondamentales, on peut exprimer les autres fonctions trigonométriques comme des quotients de fonctions à l'aide des fonctions sinus et cosinus et en appliquant la règle du quotient et on obtient la dérivée des autres fonctions trigonométriques.

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\ \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\ \cot x$$

Un peu d'histoire

APPLICATIONS DE LA TRIGONOMÉTRIE

La vocation première de la trigonométrie n'a pas été le calcul de distances et de hauteurs, même si cet usage est celui qui nous vient d'abord à l'esprit lorsqu'il est question de cette branche des mathématiques. C'est comme support technique à l'astronomie que la trigonométrie a d'abord été utilisée par les savants, babyloniens, grecs et arabes. Dans la philosophie aristotélicienne, le monde supralunaire et le monde sublunaire obéissaient à des principes distincts. Il n'était pas concevable que les méthodes utilisées dans l'étude du monde supralunaire puissent avoir des applications dans le monde sublunaire. Il a fallu que la trigonométrie devienne un champ disciplinaire distinct pour que les applications terrestres se développent.

La trigonométrie a commencé à se développer comme discipline indépendante de l'astronomie grâce aux mathématiciens arabes, en particulier Nasir Al-din Tusi (1201-1274), qui a déterminé la « loi des sinus », et Al-Kashi (1380-1429) qui a déterminé la « loi des cosinus ». Ces lois ont simplifié les procédures de résolution des triangles quelconques. En Europe, l'évolution de la trigonométrie comme branche indépendante des mathématiques doit beaucoup à l'astronome et mathématicien allemand Johann Müller, ou Regiomontanus (1436-1476).

Arc de méridien et forme de la Terre

Deux grands projets scientifiques nécessitant la mesure de la longueur d'arc d'un méridien ont permis des applications à grande échelle de la trigonométrie.

Ne pouvant accepter l'existence du vide et des forces qui se communiquent à distance comme la gravitation, Descartes a imaginé un système dans lequel les planètes sont mues par des tourbillons de matière. Selon Descartes : « les mouvements des planètes sont dus à leur entraînement par des tourbillons d'une matière subtile occupant les espaces intersidéraux » (NH Descartes04). Cette théorie des tourbillons, qui s'oppose à celle de Newton, est alors la doctrine officielle en France. Pour que ces tourbillons puissent causer la rotation de la Terre, ils devaient exercer une certaine pression à l'équateur et Jacques Cassini (1677-1756) en déduit que la Terre doit être un ellipsoïde allongée aux pôles.

Cependant, en l'absence de ces tourbillons de matière, comme dans la théorie de Newton, la force centrifuge devrait avoir comme effet un aplatissement de la Terre aux pôles.

Pour départager ces deux théories, il fallait donc déterminer la forme de la Terre. Est-elle allongée ou aplatie aux pôles ? La solution est de mesurer la longueur d'un arc de 1 degré d'un méridien, au nord et à l'équateur. Ces mesures étaient faites en mesurant une longueur de base et les angles de triangles joignant deux points situés à 1 degré de différence sur un même méridien qu'il fallait ensuite résoudre par calculs en ayant recours à la trigonométrie (NH Maupertuis). La méthode de calcul de longueurs terrestres par triangulation avait été développée pour la première fois par Willebrord Snell (1580-1626).

Arc de méridien et définition du mètre

En 1790, l'Assemblée nationale française, issue de la révolution de 1789, décide d'uniformiser les unités de mesure à la grandeur de la France. La première unité de mesure qu'il fallait établir est celle de la longueur et, pour que cette unité soit acceptable internationalement, il fallait qu'elle soit déterminée à partir d'une longueur terrestre. On choisit le dix millionième du quart de la longueur d'un méridien terrestre. Il restait à mesurer cette longueur, la tâche fut confiée à deux savants, Jean-Baptiste Delambre et Pierre François Méchain. (NH mètre). Il leur fallait procéder par triangulation et résoudre les triangles en ayant recours à la trigonométrie pour mesurer l'arc de méridien joignant Dunkerque à Barcelone.

Modèles sinusoïdaux

L'usage des fonctions trigonométriques s'est depuis répandu dans une foule de domaines, en particulier en physique pour la description des phénomènes vibratoires (NH Ondes01, NH Hooke). Les propriétés des fonctions sinusoïdales par rapport à l'addition (NH Ondes02) ont donné aux mathématiciens et aux physiciens les outils nécessaires pour décrire et analyser tous les phénomènes ondulatoires. Les phénomènes sonores et optiques ont ainsi révélé leurs secrets, ce qui a permis le développement des applications technologiques modernes.

Le mathématicien Joseph Fourier (NH Fourier01), dans son étude de la chaleur (NH Fourier02), a donné une représentation des fonctions périodiques comme somme de fonctions sinus et cosinus qui est à la base de la numérisation de la musique et des images (NH Ondes03). Ces sommes de fonctions ont soulevé un questionnement, une somme infinie de fonctions continues est-elle également une fonction continue ? (NH Ondes04)

4.4 Exercices

À l'aide des techniques de dérivation, démontrer les résultats suivants :

1. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
2. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
3. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

À l'aide des techniques de dérivation, trouver la dérivée des fonctions suivantes et donner le résultat sous forme simplifiée :

4. $f(x) = 5x^4 + \sin x$
5. $f(x) = e^x - \cos x$
6. $f(x) = x^2 \sin x$
7. $f(x) = \cos x \sin x$
8. $f(x) = e^x \sin x$
9. $f(x) = \cos x \ln x$
10. $f(x) = x^2 \tan x$
11. $f(x) = e^x \tan x$
12. $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$
13. $f(x) = \frac{\cos x}{e^x}$
14. $f(x) = \frac{\cos x}{2 \sin x}$
15. $f(x) = x^2 \sec x$

16. Trouver l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \sin x$ aux points indiqués.
    a) $c = 0$
    b) $c = \pi/6$
    c) $c = \pi/4$
    d) $c = 2\pi/3$

17. Trouver l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \cos x$ aux points indiqués.
    a) $c = 0$
    b) $c = \pi/6$
    c) $c = \pi/4$
    d) $c = 2\pi/3$

18. Trouver l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \tan x$ aux points indiqués.
    a) $c = 0$
    b) $c = \pi/4$

19. Déterminer tous les points de l'intervalle $[-\pi; 2\pi]$ où la courbe admet une tangente horizontale.
    a) $f(x) = \sin x$
    b) $f(x) = \tan x$
    c) $f(x) = \sec x$

20. Déterminer tous les points de l'intervalle $[-\pi; 2\pi]$ où la courbe admet une tangente horizontale.
    a) $f(x) = \cos x$
    b) $f(x) = \cot x$
    c) $f(x) = \csc x$

21. Les fonctions suivantes sont-elles partout dérivables ? Sinon, indiquer pour quelles valeurs elles ne le sont pas.
    a) $f(x) = \sin x$
    b) $f(x) = \cos x$
    c) $f(x) = \tan x$
    d) $f(x) = \sec x$
    e) $f(x) = \cot x$
    f) $f(x) = \csc x$

22. Déterminer tous les points de l'intervalle $[-\pi; 2\pi]$ où la courbe admet une tangente horizontale.
    a) $f(x) = \sin x + \cos x$
    b) $f(x) = \sin x - \cos x$

23. Soit la fonction définie par $f(x) = \cos x$.
    a) Déterminer la fonction dérivée.
    b) Déterminer l'équation de la droite tangente au graphique au point d'abscisse $x = \pi/4$ rad.
    c) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente est horizontale dans l'intervalle $[0; 4\pi]$.
    d) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction dans l'intervalle $[0; 4\pi]$.

24. Soit la fonction définie par $f(x) = \tan x$.
    a) Déterminer la fonction dérivée.
    b) Déterminer l'équation de la droite tangente au graphique au point d'abscisse $x = \pi/4$ rad.
    c) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente est horizontale dans l'intervalle $[0; 4\pi]$.
    d) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction dans l'intervalle $[0; 4\pi]$.

25. Soit la fonction définie par $f(x) = \sin x \cos x$.
    a) Déterminer la fonction dérivée.
    b) Déterminer l'équation de la droite tangente au graphique au point d'abscisse $x = \pi/2$.
    c) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente est horizontale.
    d) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

26. Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x}$

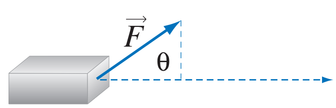
a) Déterminer la fonction dérivée.
b) Déterminer l'équation de la droite tangente au graphique au point d'abscisse $x = 0$.
c) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente est horizontale dans l'intervalle $[0; \pi]$.
d) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction dans l'intervalle $[0; \pi]$.

27. Soit $f(x) = x \cos x$. Écrire l'équation de la tangente à la courbe de cette fonction au point d'abscisse π.

28. Soit $f(x) = \tan x - 2\sin x$. Écrire l'équation de la tangente à la courbe de cette fonction au point d'abscisse $\pi/3$.

29. Soit $f(x) = e^x \cos x$, déterminer f' et f''. Déterminer pour quelles valeurs de x ces deux fonctions s'annulent dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

30. Un objet de poids P est tiré sur une surface horizontale à l'aide d'une corde.



L'intensité de la force exercée sur la corde en fonction de l'angle θ fait avec le plan horizontal est donnée par :

$$F(\theta) = \frac{\mu P}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

où μ est une constante appelée **coefficient de friction**.

a) Déterminer l'expression décrivant le taux de variation de l'intensité de la force par rapport à l'angle θ.
b) Pour quelle valeur d'angle ce taux de variation est-il nul?

31. Évaluer les limites suivantes :

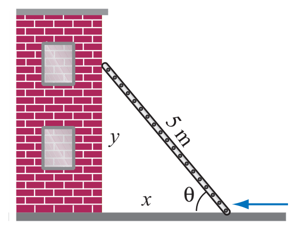
a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{x}$

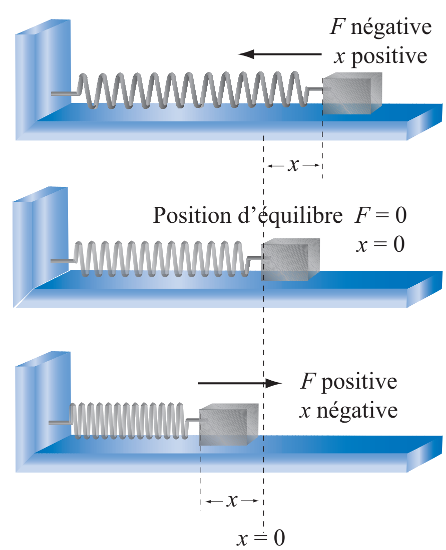
d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin x}$

32. Une échelle de 5 m est appuyée sur un mur et on pousse le pied de celle-ci vers le mur.



a) Décrire les longueurs x et y en fonction de l'angle θ que le pied de l'échelle fait avec le sol.
b) Déterminer la relation décrivant le taux de variation de chacune de ces longueurs par rapport à l'angle θ.
c) Calculer le taux de variation de chacune de ces longueurs lorsque le pied de l'échelle est à 4 m du mur. À 3 m du mur. Exprimer ces résultats en mètres par degré.

33. Un bloc au bout d'un ressort vibre horizontalement sur une surface lisse.



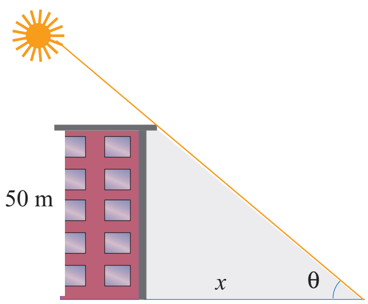
La position x du bloc en centimètres est donnée en fonction du temps t par :

$x(t) = 8 \sin t$, où t est en secondes.

a) Déterminer la fonction décrivant la vitesse en fonction du temps t.
b) Déterminer la fonction décrivant l'accélération en fonction du temps t.
c) Déterminer la position, la vitesse et l'accélération au temps $t = 2\pi/3$ s.

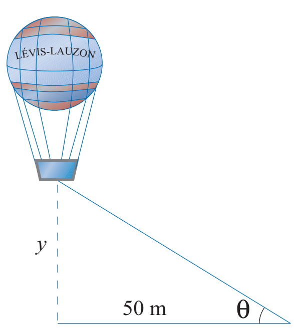
d) Dans quelle direction se déplace le bloc au temps $t = 2\pi/3$ s. Est-il en train d'accélérer ou de décélérer?

34. Le Soleil passe au-dessus d'un édifice de 50 m.



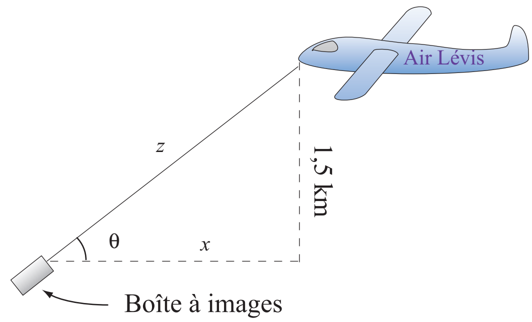
a) En notant θ, l'angle d'élévation du Soleil et x la longueur de l'ombre de l'édifice, décrire la longueur de l'ombre en fonction de l'angle d'élévation.
b) Déterminer le taux de variation de la longueur de l'ombre lorsque l'angle d'élévation est de 45°. Exprimer le résultat en mètres par degré.

35. L'ascension d'une montgolfière qui s'élève verticalement est filmée par un observateur à 50 m de cette verticale.



a) Décrire la relation entre l'altitude de la montgolfière et l'angle de visée de la caméra.
b) Déterminer la relation décrivant le taux de variation de l'altitude par rapport à l'angle θ.
c) Calculer le taux de variation de l'altitude lorsque l'angle de visée est de 30°, de 45°, de 60°. Exprimer ces résultats en mètres par degré.

36. L'approche d'un avion qui vole à une altitude constante est filmée par un observateur.



a) Décrire la relation entre la distance z et l'angle de visée de la caméra. Décrire la relation entre la distance x et l'angle de visée de la caméra.
b) Déterminer la relation décrivant le taux de variation de ces distances par rapport à l'angle de visée θ.
c) Calculer le taux de variation de ces distances lorsque z = 2,5 km. Exprimer ces résultats en mètres par degré

37. Déterminer pour quelles valeurs de x la fonction est dérivable.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$

b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{3+\sin x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

38. Utiliser la règle du produit pour dériver les fonctions suivantes.
a) $f(x) = \sec x \tan x$
b) $f(x) = \csc x \cot x$

39. Utiliser la règle du produit et les identités trigonométriques pour montrer que :

a) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^2 x\right) = \sin 2x$

b) $\dfrac{d}{dx}\left(\cos^2 x\right) = -\sin 2x$

c) $\dfrac{d}{dx}\left(\tan^2 x\right) = 2\sec^2 x \tan x$

d) $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^2 x\right) = 2\sec^2 x \tan x$

e) $\dfrac{d}{dx}\left(\cot^2 x\right) = -2\csc^2 x \cot x$

f) $\dfrac{d}{dx}\left(\csc^2 x\right) = -2\csc^2 x \cot x$

40. En utilisant les résultats du numéro précédent et les identités trigonométriques, déterminer les zéros de la fonction dérivée (valeur de l'intervalle principal seulement).

a) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{e^x}$

b) $f(x) = \dfrac{\tan^2 x}{e^x}$

c) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\cos^2 x}$

d) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\tan^2 x}$

41. Utiliser la règle du quotient pour dériver les fonctions suivantes, puis simplifier en utilisant les identités trigonométriques.

a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

c) $f(x) = \dfrac{\sec x}{\tan^2 x}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sec^2 x}$