Les surfaces courbes dans l'espace

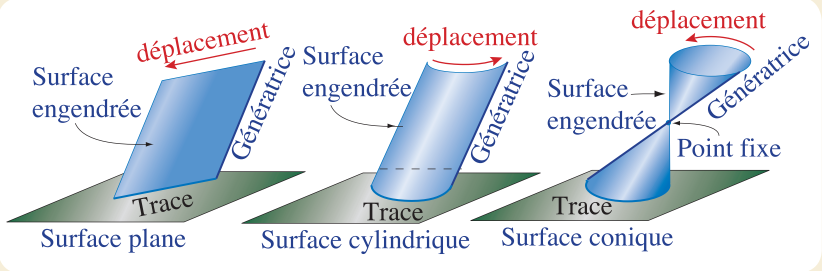
Parmi les surfaces de l'espace. Nous distinguons :

- les surfaces engendrées par le déplacement d'une droite dans l'espace, ce sont les surfaces comportant une génératrice (cylindres, cônes);
- les surfaces qui ne sont pas engendrées par le déplacement d'une droite dans l'espace, ce sont les surfaces sans génératrice (sphères, ellipsoïdes, paraboloïdes, hyperboloïdes).

Surfaces comportant une génératrice

Génératrice

Une **génératrice** est une droite qui engendre une surface en se déplaçant dans l'espace.



Surface cylindrique

On appelle **surface cylindrique** une surface engendrée par une droite Δ qui se déplace parallèlement à elle-même. La droite est appelée la **génératrice** de la surface.

Dans l'espace, une équation du second degré dont une des trois variables est absente définit une surface cylindrique dont la génératrice se déplace parallèlement à l'axe correspondant à la variable absente. Pour connaître la forme de la surface, on détermine la trace de la surface sur le plan du système de coordonnées perpendiculaire à l'axe de la variable absente.

REMARQUE

Dans son déplacement, la génératrice laisse une trace sur les plans qui ne lui sont pas parallèles. De plus, elle peut se déplacer parallèlement à elle-même ou en ayant un point fixe, et la trace de son déplacement sur un plan non parallèle peut être une droite ou une courbe. Si la génératrice se déplace parallèlement à elle-même, elle engendre une surface qui peut être un plan ou une surface cylindrique.

Si la génératrice se déplace en conservant un point fixe, elle engendre une surface qui peut être un plan (non illustré; pensez à une pale de ventilateur) ou une surface conique.

EXEMPLE 1

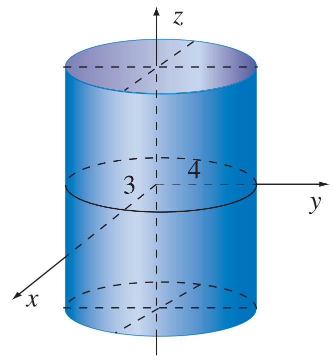
Représenter graphiquement la surface définie par l'équation

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Solution

La trace sur le plan $z = 0$ est une ellipse dont la demi-longueur du grand axe est 4 et la demi-longueur du petit axe est 3.

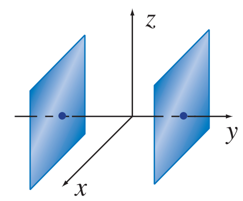
C'est la même trace sur chaque plan parallèle à $z = 0$. La surface se prolonge de $-\infty$ à $+\infty$. La variable z est une variable libre indépendante des deux autres.



Dans l'espace, le lieu décrit par une équation du second degré à une variable est formé de deux plans parallèles, d'un plan (par exemple, $z^2 = 0$) ou de l'ensemble vide.

EXEMPLE 2

Représenter graphiquement la surface définie par l'équation $y^2 = 9$.



Solution

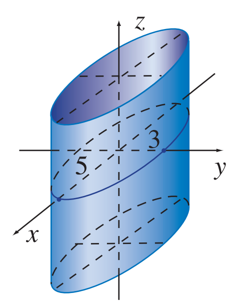
Puisque $y^2 = 9$, on a $y = \pm 3$; le lieu des points est donc constitué des plans $y = 3$ et $y = -3$.

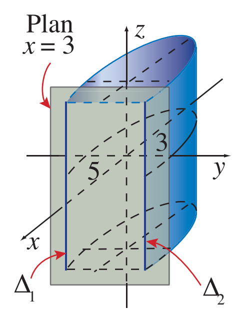
EXEMPLE 3

Représenter graphiquement la surface définie par l'équation :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Représenter graphiquement la trace de ce cylindre sur le plan d'équation $x = 3$.





Solution

L'axe du cylindre est parallèle à l'axe des z et la trace du cylindre sur un plan parallèle au plan OXY est une ellipse dont l'axe focal est parallèle à l'axe des x et pour lequel la demi-longueur du grand axe mesure 5 unités et la demi-longueur du petit axe, 3 unités. On a la représentation ci-contre.

En substituant 3 à x dans l'équation, on trouve :

$$y^2 = \frac{144}{25}.$$

On en tire $y = \pm 12/5$. La trace est l'intersection du plan $x = 3$ et des plans $y = 12/5$ et $y = -12/5$; elle est donc constituée des deux droites verticales suivantes :

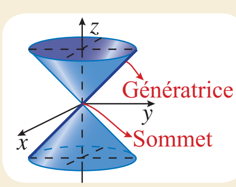
Δ_1 : $\{(x; y; z) \mid x = 3; y = -12/5; z = t\}$

Δ_2 : $\{(x; y; z) \mid x = 3; y = 12/5; z = t\}$

Dans ces descriptions paramétriques, les variables x et y sont liées, alors que la variable z est libre.

Surface conique

On appelle **surface conique** une surface engendrée par une droite Δ qui se déplace tout en conservant un point fixe. La droite Δ est appelée **génératrice** de la surface conique et le point fixe, **sommet**.



EXEMPLE 4

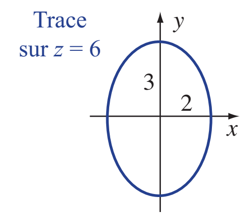
Soit la surface définie par l'équation $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=0$.

a) Déterminer la trace de cette surface sur le plan $z = 6$ et représenter graphiquement cette trace.
b) Déterminer la trace de cette surface sur le plan $y = 1$ et représenter graphiquement cette trace.
c) Déterminer la trace de cette surface sur le plan $x = 1$ et représenter graphiquement cette trace.
d) Représenter graphiquement cette surface.

Solution

a) La trace sur le plan d'équation $z = 6$ est obtenue en substituant cette valeur dans l'équation, ce qui donne :

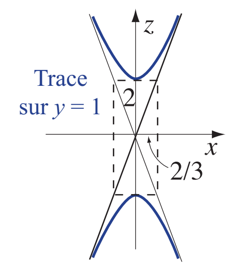
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{(6)^2}{36}=0, \text{ d'où l'on tire } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$



La trace est une ellipse, l'axe focal est parallèle à l'axe des y et la demi-longueur est 3. La demi-longueur de l'axe transverse est 2.

b) La trace sur le plan d'équation $y = 1$ est obtenue en substituant cette valeur dans l'équation, ce qui donne :

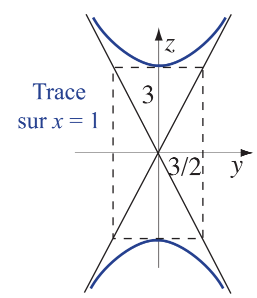
$$\frac{x^2}{4}+\frac{1}{9}-\frac{z^2}{36}=0, \text{ d'où l'on tire } -\frac{x^2}{4/9}+\frac{z^2}{4}=1.$$



La trace est donc une hyperbole dont l'axe focal est parallèle à l'axe des z et pour lequel la demi-longueur du grand axe est égale à 2 unités et la demi-longueur de l'axe transverse est égale à 2/3 unité.

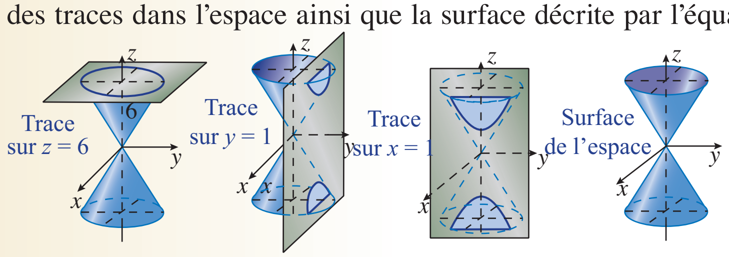
c) La trace sur le plan d'équation $x = 1$ est obtenue en substituant cette valeur dans l'équation, ce qui donne :

$$\frac{1}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=0, \text{ d'où l'on tire } -\frac{y^2}{9/4}+\frac{z^2}{9}=1.$$



La trace est donc une hyperbole dont l'axe focal est parallèle à l'axe des z et pour lequel la demi-longueur du grand axe est égale à 3 unités et la demi-longueur de l'axe transverse est égale à 3/2 unité.

d) Les traces indiquent que la surface définie par l'équation est une surface conique. Puisque le point (0; 0; 0) satisfait à cette équation, le sommet de la surface conique est à l'origine. Les figures suivantes illustrent chacune des traces dans l'espace ainsi que la surface décrite par l'équation.



Surfaces sans génératrice

Parmi les surfaces sans génératrice, on trouve les sphères, les ellipsoïdes, les paraboloïdes et les hyperboloïdes. Nous allons présenter la forme des équations décrivant ces surfaces et les représenter graphiquement à l'aide de leurs traces sur différents plans.

Dans cette partie, les traces sont des coniques, il peut être indiqué de voir, ou revoir, ces notions à l'aide des vidéos en cliquant sur le lien

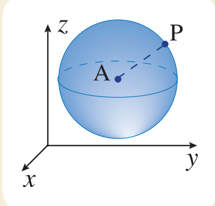
Coniques

Sphère

La **sphère** de rayon r centrée en $(a;\ b;\ c)$ est le lieu des points $P(x;\ y;\ z)$ dont la distance au point $A(a;\ b;\ c)$ est égale à r, soit :

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z0-c)^2} = r,$$

d'où l'on tire : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.



EXEMPLE 5

Déterminer les caractéristiques demandées de la sphère.

a) Le centre et le rayon de la sphère $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-22=0$.

b) La trace de la sphère $x^2+y^2+z^2=25$ sur le plan d'équation $z=3$.

Solution

a)Par complétion du carré, on trouve :

$(x^2-6x)+(y^2+4y)+(z^2-2z)-22=0$

$(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)+(z^2-2z+1)-36=0$

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=36$

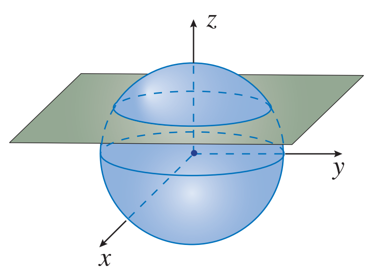
C'est donc une sphère de rayon 6 centrée à (3; –2; 1).

b) En substituant l'équation du plan dans l'équation de la sphère, on trouve :

$$x^2+y^2+9=25$$

et : $x^2+y^2=16$

Le lieu des points est donc un cercle de rayon 4 centré à (0;0;3) dans le plan $z=3$.



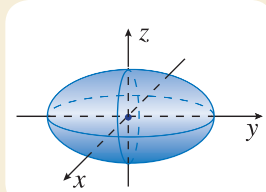
Types de surfaces sans génératrice

Ellipsoïdes

Lorsque l'équation $Ax^2+By^2+Cz^2=k$, où A, B, C et k sont non nuls, se ramène à une équation de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \text{où } a\neq 0, b\neq 0 \text{ et } c\neq 0,$$

alors le lieu des points satisfaisant à l'équation est un **ellipsoïde**. Ses traces sur les plans du système de coordonnées sont des ellipses. La sphère de centre (0; 0; 0) est le cas particulier où $a=b=c$.



Ellipsoïde

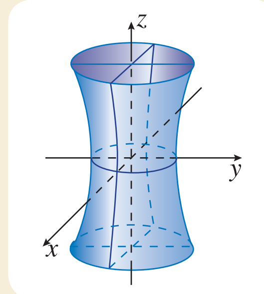
Hyperboloïdes

Hyperboloïde à une nappe

Lorsque l'équation $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k$, où A, B, C et k sont non nuls, se ramène à une équation de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ où } a \neq 0, b \neq 0 \text{ et } c \neq 0,$$

alors le lieu des points satisfaisant à l'équation est un **hyperboloïde à une nappe**. Les traces sur deux des plans du système d'axes sont des hyperboles. Sur le troisième plan, la trace est une ellipse.



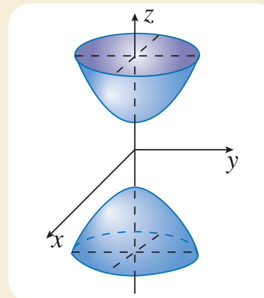
Hyperboloïde à une nappe

Hyperboloïde à deux nappes

Lorsque l'équation $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k$, où A, B, C et k sont non nuls, se ramène à une équation de la forme :

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ où } a \neq 0, b \neq 0 \text{ et } c \neq 0,$$

alors le lieu des points satisfaisant à l'équation forme un **hyperboloïde à deux nappes**. Ses traces sur deux des plans du système d'axes sont des hyperboles. Sur le troisième plan, il n'y a aucune trace.



Hyperboloïde à deux nappes

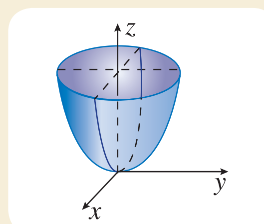
Paraboloïdes

Paraboloïde elliptique

Lorsque l'équation $Ax^2 + By^2 + Cz = k$, où A, B, C et k sont non nuls, se ramène à une équation de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \text{ où } a \neq 0, b \neq 0 \text{ et } \neq 0,$$

alors le lieu des points satisfaisant à l'équation forme un **paraboloïde elliptique**. Ses traces sur deux des plans du système d'axes sont des paraboles. Sur le plan $z = 0$, la trace est le point (0; 0; 0); sur les plans $z = k$, la trace, lorsqu'elle existe, est une ellipse.



Paraboloïde elliptique

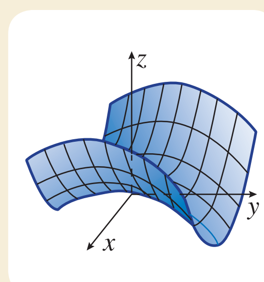
Paraboloïde hyperbolique

Lorsque l'équation $Ax^2 + By^2 + Cz = k$, où A, B, C et k sont non nuls, se ramène à une équation de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \text{ où } a \neq 0, b \neq 0 \text{ et } \neq 0,$$

alors le lieu des points satisfaisant à l'équation forme un **paraboloïde hyperbolique**. Ses traces sur deux des plans du système d'axes sont des paraboles. Sur le troisième plan, la trace est formée des droites

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \text{ et } \frac{y}{b} = -\frac{x}{a}.$$



Paraboloïde hyperbolique

Dans la figure ci-dessus, sur le plan $z = 1$, la trace est une hyperbole.

Exercices

1. Dans les cas suivants, déterminer la trace de la quadrique sur les plans indiqués. À l'aide de ces traces, représenter graphiquement la quadrique.
   a) $y^2 + 4z^2 = 36$, sur les plans : $x = 0, x = 1, x = 2$ et $x = 4$
   b) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, sur les plans : $z = 0, z = 1, z = 2$ et $z = -2$
   c) $4x^2 - 9y^2 + 4z^2 = 0$, sur les plans : $y = 0, y = \pm 1, y = \pm 2$ et $y = \pm 4$
   d) $4x^2 - y^2 + 9z^2 = 0$, sur les plans : $y = 0, y = \pm 1, y = \pm 2$ et $y = \pm 4$
   e) $16x^2 + 9y^2 - 25z^2 = 0$, sur les plans : $z = 0, z = \pm 1, z = \pm 2$ et $z = \pm 4$
   f) $9x^2 + 4y^2 = 36$, sur les plans : $z = 0, z = \pm 1, z = \pm 2$ et $z = \pm 4$
   g) $4x^2 - 9y^2 = 36$, sur les plans : $z = 0, z = \pm 1, z = \pm 2$ et $z = \pm 4$
   h) $z = y^2$, sur les plans : $x = 0, x = \pm 1, x = \pm 2$ et $x = \pm 4$

2. Résoudre les problèmes suivants.
   a) Représenter graphiquement la quadrique
   $$x^2 + y^2 + z^2 = 16.$$
   b) Trouver l'équation du lieu des points dont la distance au point (2; –3; 4) est égale à 4.
   c) Montrer que l'équation d'une sphère de rayon r centrée en $(a; b; c)$ est :
   $$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$
   où $d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$.
   d) Représenter graphiquement la quadrique :
   $$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 10z + 29 = 0$$
   e) Représenter graphiquement la quadrique d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 8z + 1 = 0$.
   f) Déterminer l'équation de la sphère centrée à (3; –2; 5) et passant par le point (1; –4; 2).

3. Déterminer la trace de la quadrique sur les plans indiqués dans les cas suivants. À l'aide de ces traces, représenter graphiquement la quadrique.
   a) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 576$, sur les plans : $x = 0, y = 0, z = 0$
   b) $4x^2 + 9y^2 - 16z^2 = 576$, sur les plans : $x = 0, y = 0, z = 0$
   c) $4x^2 - 9y^2 - 16z^2 = 576$, sur les plans : $x = 0, y = 0, z = 0, x = \pm 12, x = \pm 15$

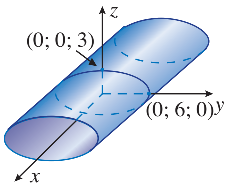
4. Déterminer la trace de la quadrique sur les plans indiqués dans les cas suivants. À l'aide de ces traces, représenter graphiquement la quadrique.
   a) $9x^2 - 4y^2 + 9z^2 + 36 = 0$, sur les plans : $y = 0, y = \pm 3, y = \pm 4, y = \pm 6$
   b) $9x^2 - 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0$, sur les plans : $y = 0, y = \pm 2, y = \pm 4, y = \pm 6$
   c) $x^2 + y^2 - z = 0$, sur les plans : $z = 0, z = 1, z = 2, z = 4$
   d) $x^2 + 4y^2 - 4z = 0$ sur les plans : $z = 0, z = 1, z = 2, z = 4$

5. Dans les cas suivants, déterminer la trace de la quadrique sur les plans indiqués. À l'aide de ces traces, représenter graphiquement la quadrique.
   a) $x^2 + 4y^2 = 36$, sur les plans $z = 0, z = 1, z = 2$ et $z = 4$.
   b) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, sur les plans $y = 0, y = 1, y = 2$ et $y = -2$.
   c) $4x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0$, sur les plans $z = 0, z = 1, z = -1, z = 2, z = -2, z = 4$ et $z = -4$.

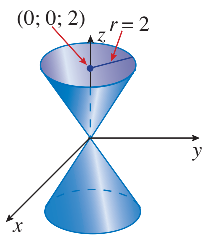
6. Dans les cas suivants, déterminer la trace de la quadrique sur les plans indiqués. À l'aide de ces traces, représenter graphiquement la quadrique.
   a) $9x^2 + 9y^2 - 4z^2 + 36 = 0$, sur les plans $z = 0, z = 3, z = -3, z = 4, z = -4, z = 6$ et $z = -6$.
   b) $9x^2 + 9y^2 - 4z^2 - 36 = 0$, sur les plans $z = 0, z = 2, z = -2, z = 4, z = -4, z = 6$ et $z = -6$.
   c) $x^2 - y + z^2 = 0$, sur les plans $y = 0, y = 1, y = 2$ et $y = 4$.

Réponses

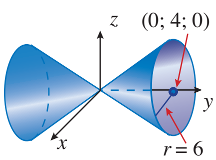
1\. a)



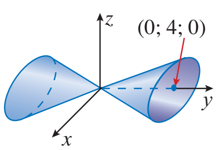
b)



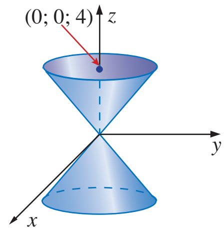
c)



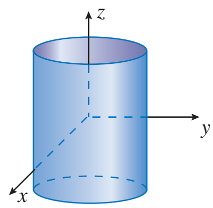
d)



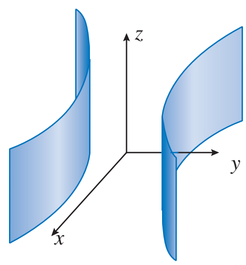
e)



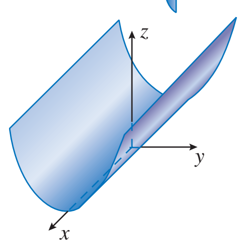
f)



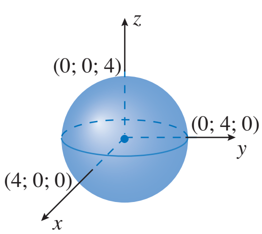
g)



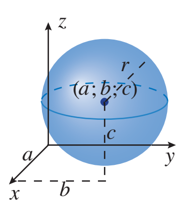
h)



2\. a)



c)



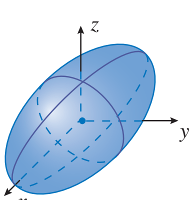
b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 13 = 0$

d) Sphère de rayon 3 centrée en (3; 2; 5)

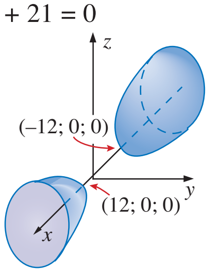
e) Sphère de rayon 5 centrée en (3; 1; 4)

f) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z + 21 = 0$

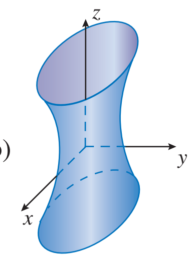
3\. a)



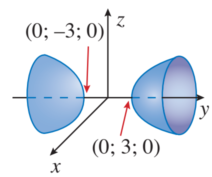
c)



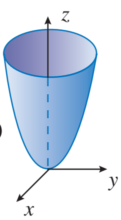
b)



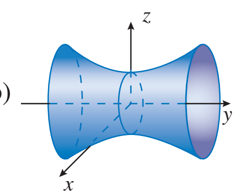
4\. a)



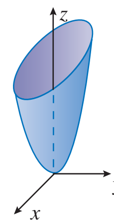
c)



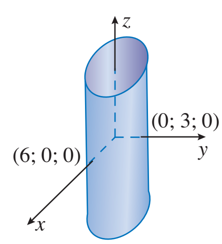
b)



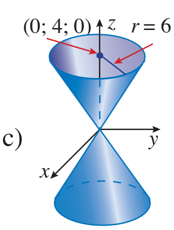
d)



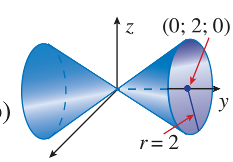
5\. a)



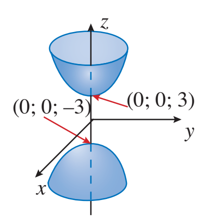
c)



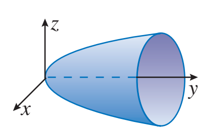
b)



6\. a)



c)



b)