FONCTIONS *et* MODÉLISATION

CHAPITRE 3

Résoudre des problèmes en ayant recours à un modèle fonctionnel.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont :

- la description d'un problème à l'aide d'un modèle affine;
- la détermination des paramètres d'une droite à partir des données d'un problème;
- l'utilisation de la fonction inverse d'une fonction affine dans la résolution d'un problème.

OBJECTIFS

3.1 Déterminer les paramètres d'un modèle affine pour décrire une situation.

3.2 Utiliser la fonction inverse d'une fonction affine pour résoudre des problèmes.

3.3 Interpréter selon le contexte les résultats obtenus à l'aide du modèle.

3.1 Fonction et inverse

Lorsque les points qui représentent graphiquement les valeurs correspondantes de deux variables forment une droite, le lien entre les variables est décrit par l'équation de cette droite. La démarche pour trouver cette équation est appelée **modélisation affine**.

Modélisation affine

PROCÉDURE

Modélisation affine

1. Identifier les données et les variables du problème.
2. Modéliser mathématiquement:
   a) Choisir la variable indépendante et la variable dépendante.
   b) Décrire mathématiquement le lien entre les variables en déterminant les paramètres a et b de la droite.
3. Utiliser le modèle (ou les modèles) pour analyser la situation et trouver ce que l'on cherche. Représenter graphiquement et interpréter les résultats selon le contexte, s'il y a lieu.

EXEMPLE 3.1.1

ModAffine01

L'entreprise qui vous emploie doit remplacer temporairement un appareil nécessitant des réparations dont la durée pourrait être de deux à trois mois. Deux compagnies de location ont présenté une soumission. La première compagnie demande 120 $ par jour de location tous services inclus. La deuxième compagnie exige 80 $ par jour et des frais d'installation de 2 100 $. L'appareil est muni d'un dispositif qui détermine le nombre de jours d'utilisation pour tenir compte seulement des jours ouvrables dans la facturation. Vous devez préparer une étude comparative de ces offres pour le conseil d'administration qui devra choisir un fournisseur. Déterminer quelle entreprise offre la solution la plus économique, compte tenu de la durée possible de la location.

Solution

ÉTAPE 1: Identifier les données et les variables du problème.

Durée de la location de deux à trois mois.

Coût : premier fournisseur, 120 $ par jour tout inclus,

deuxième fournisseur, 80 $ par jour plus 2 100 $ de frais de base.

Les variables du problème sont le nombre de jours de location et le coût de location pour chacune des deux compagnies.

ÉTAPE 2: Modéliser mathématiquement.

a) Dans cette situation, la variable indépendante est le nombre de jours de location et le coût de location dépend de la durée de la location.

b) On pose donc x pour le nombre de jours de location,
C_1, le coût de location par la première compagnie,
C_2, le coût de location par la deuxième compagnie.

Dans ce cas, les données du problème ont permis d'exprimer directement le coût de location en fonction du nombre de jours de location, soit:

$C_1(x) = 120x$, le coût en fonction du nombre de jours pour la première compagnie,

$C_2(x) = 80x + 2\,100$, le coût en fonction du nombre de jours pour la deuxième compagnie.

ÉTAPE 3: Utiliser le modèle pour analyser la situation et trouver ce que l'on cherche.

Pour analyser la situation, nous devons calculer le coût pour différentes durées de location. Le coût pour 30 jours d'utilisation pour chacune des soumissions donne

$$C_1(30) = 120 \times 30 = 3\,600 \text{ \$},$$

et $$C_2(30) = 80 \times 30 + 2\,100 = 4\,500 \text{ \$}.$$

Le coût pour 90 jours d'utilisation pour chacune des soumissions donne

$$C_1(90) = 120 \times 90 = 10\,800 \text{ \$},$$

et $$C_2(90) = 80 \times 90 + 2\,100 = 9\,300 \text{ \$}.$$

On constate que, pour 30 jours de location, il est plus avantageux de choisir la première compagnie mais, pour 90 jours de location, il est préférable de choisir la deuxième.

On cherche pour quel nombre de jours de location le coût sera le même pour les deux compagnies. On cherche donc x pour lequel

$$C_1(x) = C_2(x).$$

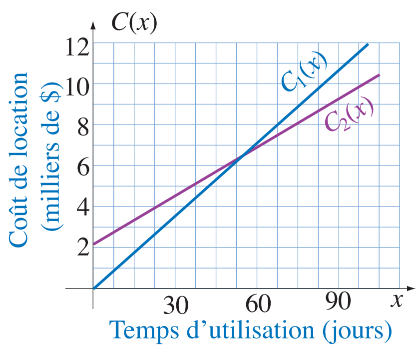
Soit $120x = 80x + 2\,100$,

d'où $40x = 2\,100$

et $x = 52{,}5$.

On peut donc conclure que, si la location doit durer moins de 52 jours, il est préférable de choisir la première compagnie mais si elle doit durer 53 jours ou plus, il est préférable de choisir la deuxième compagnie. Le conseil d'administration devra trancher.

Les modèles mathématiques $C_1(x)$ et $C_2(x)$ sont de la forme $y = ax + b$. La représentation graphique du premier modèle est une droite dont la pente, qui représente les frais variables est $a = 120$ \$/jour. La représentation graphique du deuxième modèle est une droite dont la pente, $a = 80$ \$/jour et $b = 2\,100$ \$, représente les frais fixes. On représente la variable indépendante sur l'axe horizontal et la variable dépendante sur l'axe vertical, ce qui donne la représentation graphique ci-contre.



Dans la procédure de modélisation affine, il faut décrire mathématiquement la situation à l'aide des données du problème. Cela signifie, pour la modélisation affine, qu'il faut trouver l'équation d'une droite. Avant d'aller plus loin dans la modélisation, nous allons donc revoir quelques notions sur les fonctions et les équations de droites.

Relation et fonction

Relations_01

ModAffine02

Relation

On appelle **relation** de A dans B tout ensemble de couples $(c; d)$ tel que $c \in A$ et $d \in B$. L'ensemble A est appelé **ensemble de départ** et B, **ensemble d'arrivée** de la relation. Le premier élément d'un couple $(c; d)$ de la relation est appelé **préimage** de d par la relation et le deuxième élément du couple est appelé **image** de c par la relation.

REMARQUE
Lorsqu'on parle de relation, ou de fonction, on parle d'une correspondance entre les éléments de deux ensembles. Dans les cas étudiés dans le présent ouvrage, il s'agit de deux ensembles de nombres.

Domaine et codomaine d'une relation

On appelle **domaine d'une relation** l'ensemble des valeurs qui sont préimage dans au moins un couple de la relation.

On appelle **codomaine d'une relation** l'ensemble des valeurs qui sont image dans au moins un couple de la relation.

Représentations

Relations_02

La représentation d'une relation sous la forme d'un tableau ou d'une liste de couples est une représentation en **extension**. La description en **compréhension** d'une relation consiste en l'énoncé d'une **règle de correspondance**. En associant à chaque couple d'une relation un point dans un système de référence cartésien, on obtient une **courbe** qui est la **représentation graphique** de la relation.

Fonction

Une **fonction** est une relation pour laquelle chaque élément du domaine a une et une seule image.

Relations_03
Relations_04

Zéros et ordonnée à l'origine d'une fonction

Les **zéros** d'une fonction sont les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.
L'**ordonnée à l'origine** est l'image de 0 par la fonction.

REMARQUE
Dans la recherche des zéros d'une fonction, il faut résoudre une équation. La démarche à suivre dépend du type d'équation.

Fonction affine

Une **fonction affine** est une fonction définie par une expression de la forme

$$f(x) = ax + b$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

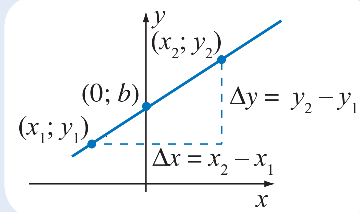
Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite dont l'intersection avec l'axe vertical est $(0; b)$ et dont le coefficient a est appelé **pente** de la droite. Lorsque la règle de correspondance d'une fonction affine n'est pas connue, on peut trouver la pente de la droite à partir de deux des points de cette droite.

Pente d'une droite

Soit $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ deux points d'une droite, tels que $x_1 \neq x_2$. On définit la **pente** de cette droite par le rapport

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



La pente est la représentation graphique du taux de variation de la variable dépendante sur la variable indépendante. On doit parfois vérifier, à partir des données du problème, si le modèle affine est pertinent. Il faut donc vérifier si les données forment bien une droite. Pour ce faire, on calcule la pente entre différents points représentant les données du problème. Si la pente est constante, le modèle affine est indiqué.

Lorsque la constante b est nulle, on a $f(x) = ax$ ou $y = ax$ et y varie de façon **directement proportionnelle** à x, car le rapport y/x est constant et égal à a. Lorsque $a = 0$, on a une **fonction constante** $f(x) = b$. Graphiquement, c'est une droite parallèle à l'axe des x. Une fonction affine est **croissante** lorsque sa pente est positive et **décroissante** lorsque sa pente est négative. Dans un modèle affine, y n'est pas proportionnel à x, mais Δy est proportionnel à Δx et la constante de proportionnalité est la pente.

Équation d'une droite

On a souvent à trouver la règle de correspondance entre deux variables à partir de données numériques ou de couples. Lorsque le phénomène est affine, il faut trouver l'équation d'une droite. Différents cas peuvent se présenter.

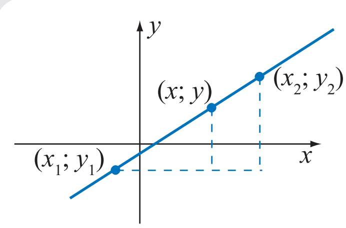
PROCÉDURE

Équation d'une droite

Deux points de la droite sont connus

Soit $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ deux points d'une droite, tels que $x_1 \neq x_2$. Pour qu'un point quelconque $(x; y)$ soit sur la même droite que $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$, il faut que la pente soit la même en prenant ces points deux à deux. Traduite algébriquement, cette condition donne

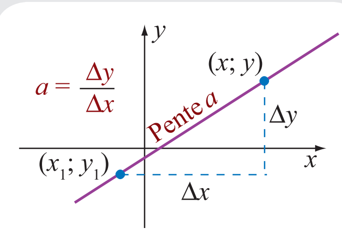
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Un point et la pente de la droite sont connus

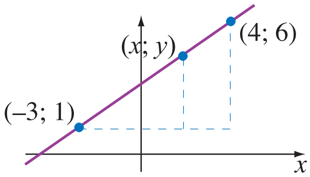
Soit $(x_1; y_1)$ un point et a la pente de la droite. Pour qu'un point $(x; y)$ soit sur cette droite, il faut que la valeur de la pente entre les points $(x; y)$ et $(x_1; y_1)$ soit égale à a. Traduite algébriquement, cette condition s'écrit

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a \quad \text{ou encore } y - y_1 = a\,(x - x_1).$$



EXEMPLE 3.1.2

Déterminer l'équation de la droite passant par les points (– 3; 1) et (4; 6).



Solution

En utilisant $\frac{y-1}{x-(-3)}=\frac{6-1}{4-(-3)}=\frac{5}{7}$.

on trouve $\frac{y-1}{x+3}=\frac{5}{7}$.

d'où
$$7\,(y-1) = 5\,(x+3)$$
$$7y-7 = 5x+15$$
$$7y = 5x+22$$

et $y=\frac{5x}{7}+\frac{22}{7}$.

Dans l'exemple précédent, pour exprimer clairement que la variable y est une fonction de la variable x, on écrit :

$$f(x)=\frac{5x}{7}+\frac{22}{7}.$$

EXEMPLE 3.1.3

Après avoir suivi un cours sur la modélisation affine, le propriétaire d'immeubles locatifs estime que le lien entre les coûts de chauffage mensuels et la température extérieure est de nature affine. Il a noté qu'en octobre, la température moyenne a été de 13°C et que les coûts de chauffage pour l'ensemble de ses logements a été de 1 340 $. Par ailleurs, en novembre, pour une température moyenne de 8°C, les coûts se sont élevés à 2 530 $.

a) En supposant que le phénomène est effectivement modélisable par un lien affine, construire un tel modèle, indiquer la signification des paramètres selon le contexte et représenter graphiquement le lien affine.

b) Déterminer le zéro de la fonction et interpréter le résultat selon le contexte.

c) Selon les données du service de météorologie local, la température moyenne durant le mois de janvier, au cours des années précédentes, a été de –18°C. En utilisant le modèle, estimer les coûts de chauffage pour le mois de janvier suivant.

Solution

a) **Identification des variables**

Soit C, les coûts mensuels de chauffage, et T, la température moyenne durant le mois.

Définition du lien entre les variables

Si l'hypothèse du propriétaire est exacte, la relation entre les coûts et la température est de la forme $C = aT + b$.

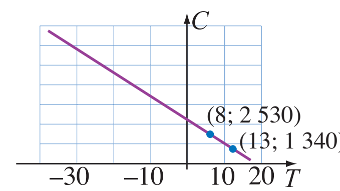
La pente de la droite représentant graphiquement le modèle affine cherché est :

$$a = \frac{1\ 340 - 2\ 530}{13 - 8} = -238\ \$/°C.$$

Le modèle est donc de la forme $C = -238T + b$. En substituant les coordonnées d'une des correspondances aux variables, on obtient la valeur de b :

$$2\ 530 = -238 \times 8 + b, \text{ donc } b = 4\ 434\ \$.$$

La fonction est donc $C(T) = -238T + 4\ 434$ \$.



Le fait que la pente est de –238 \$/°C signifie que les coûts mensuels de chauffage diminuent de 238 \$ pour chaque augmentation de 1 °C de la température mensuelle moyenne. L'ordonnée à l'origine, 4 434 \$, est la valeurs des coûts mensuels de chauffage lorsque la température mensuelle moyenne est de 0 °C.

Utilisation du modèle

b) Le zéro de la fonction est la température mensuelle moyenne pour laquelle les coûts de chauffage mensuels sont nul :

$$-238T + 4\ 434 = 0, \text{ donc } T = 18{,}63\ °C.$$

c) Si la température moyenne au mois de janvier est de –18 °C, le coût de chauffage estimés à l'aide du modèle est :

$$C(-18) = -238 \times -18 + 4\ 434 = 8\ 718\ \$.$$

Relation réciproque et fonction inverse

Relation réciproque et fonction inverse

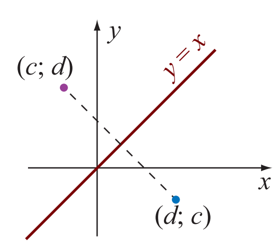
Soit f une fonction, on appelle **relation réciproque** de f, la relation formée des couples réciproques de la fonction f. Lorsque la relation réciproque d'une fonction est elle-même une fonction, on l'appelle **fonction inverse** et on la note f^{-1}.

Relations_06

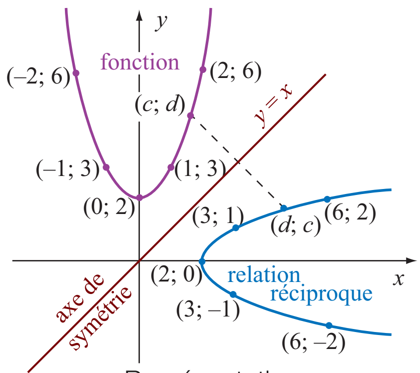
REMARQUE

Dans les applications, on utilise généralement la première lettre de la grandeur physique pour désigner la variable et on n'intervertit pas les symboles pour écrire la règle de correspondance de la relation réciproque ou de la fonction inverse.

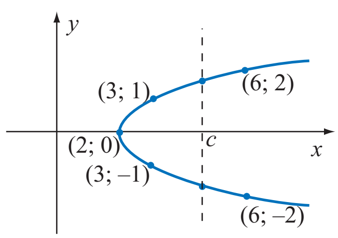
Puisque le couple réciproque d'un couple $(c; d)$ est le couple $(d; c)$, on obtient la règle de correspondance de la relation réciproque d'une fonction f en isolant la variable indépendante dans la règle de correspondance de f. Selon l'usage, en mathématiques, on emploie la lettre x pour désigner la variable indépendante. C'est pourquoi, après avoir isolé celle-ci, on intervertit x et y pour écrire la règle de correspondance de la relation réciproque. On peut construire rapidement le graphique de la relation réciproque puisque, dans un système cartésien, les couples réciproques sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.



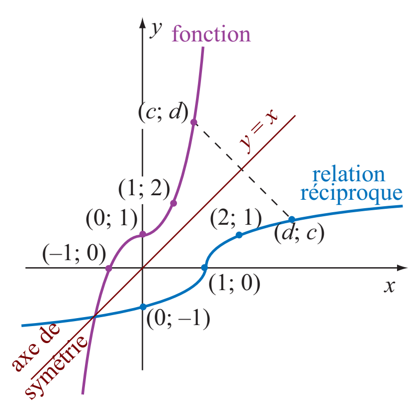
Couples réciproques



Représentation par symétrie



Relation réciproque



Fonction inverse

EXEMPLE 3.1.6

Déterminer la règle de correspondance de la relation réciproque de chacune des fonctions suivantes. Donner le domaine de la relation réciproque et esquisser son graphique et dire si c'est une fonction.

a) $y = x^2 + 2$ b) $y = x^3 + 1$

Solution

a) Pour déterminer la règle de correspondance de la relation réciproque, il faut isoler la variable x dans l'équation de la relation $y = x^2 + 2$. On obtient $x^2 = y - 2$ et $x = \pm\sqrt{y-2}$. En intervertissant la désignation des variables, on a la règle de correspondance de la relation réciproque

$$y = \pm\sqrt{x-2}.$$

Le domaine de cette relation est l'ensemble des valeurs de x telles que $x - 2 \geq 0$, soit l'intervalle $[2; \infty[$.

Pour esquisser le graphique, on pourrait calculer des correspondances, mais il est plus simple de représenter d'abord la fonction $f(x) = x^2 + 2$, puis de construire le graphique de la relation réciproque par symétrie par rapport à la droite $y = x$. Le graphique de la fonction f est une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe des y et dont le sommet est $(0; 2)$. En se servant de la symétrie, on obtient le graphique représenté ci-contre.

La relation réciproque n'est pas une fonction, car certains des éléments du domaine ont deux images. C'est le cas, par exemple, de $x = 3$ qui est la préimage des couples $(3; 1)$ et $(3; -1)$.

b) Pour déterminer la règle de correspondance de la relation réciproque, il faut isoler la variable x dans l'équation de la relation $y = x^3 + 1$. On obtient $x^3 = y - 1$ et $x = \sqrt[3]{y-1}$. En intervertissant la désignation des variables, on obtient la règle de correspondance de la relation réciproque

$$y = \sqrt[3]{x-1}.$$

Puisqu'une racine impaire est définie pour tout nombre réel, le domaine de cette relation est l'ensemble des nombres réels.

Pour esquisser le graphique, on trace d'abord le graphique de la fonction $f(x) = x^3 + 1$, puis on construit celui de la relation réciproque par symétrie par rapport à la droite $y = x$. On obtient ainsi le graphique représenté ci-contre.

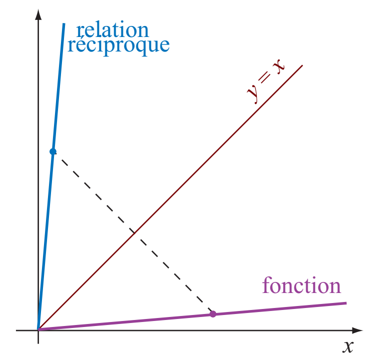
La relation réciproque est une fonction.

EXEMPLE 3.1.5

Un représentant de commerce a la mauvaise habitude de ne pas remplir correctement le formulaire de remboursement des dépenses de voyage. Il ne donne pas la distance parcourue mais seulement la quantité d'essence consommée.

a) Sachant que la consommation d'essence de la voiture est de 8,2 L/100 km, déterminer un modèle permettant de calculer la distance parcourue en connaissant la quantité d'essence consommée.

b) Le représentant vous remet un rapport indiquant que la consommation d'essence pour la semaine écoulée est de 56,5 L. Utiliser le modèle pour calculer le nombre de kilomètres parcourus.



Solution

a) La consommation d'essence est la pente de la droite. Soit x, le nombre de kilomètres parcourus, et y, la quantité d'essence consommée par kilomètre. La relation entre les variables est

$$q = 0{,}082\ x.$$

Pour calculer la distance, on détermine la fonction inverse.

$$x = \frac{1}{0{,}082}q,\ \text{d'où}\ x = 12{,}2q.$$

b) Pour une consommation de 56,5 L, la distance parcourue est

$$x = 12{,}2 \times 56{,}5 = 689\ \text{km}.$$

Droites perpendiculaires

Le produit des pentes respectives de deux droites perpendiculaires est égal à –1.

EXEMPLE 3.1.6

Trouver l'équation générale de la droite passant par le point (–3; 4) et perpendiculaire à la droite d'équation

$$2x - 3y + 4 = 0.$$

Solution

Pour écrire l'équation d'une droite, on doit connaître la pente et un point de la droite. On donne le point (–3; 4) et on doit déterminer la pente. La droite recherchée étant perpendiculaire à la droite d'équation $2x - 3y + 4 = 0$, on obtient sa pente en appliquant le théorème sur les pentes des droites perpendiculaires : le produit des pentes est –1. En isolant y dans l'équation de la droite connue, on obtient

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

La pente de cette droite est le coefficient de x, soit $a_1 = 2/3$. La pente a_2 de la droite recherchée doit vérifier l'équation :

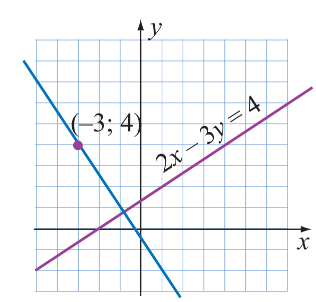
$$a_1 a_2 = -1.$$

En substituant la valeur de a_1 dans cette équation et en isolant a_2, on obtient $a_2 = -3/2$. Par conséquent,

$$y - 4 = \frac{-3}{2}(x + 3).$$

En isolant y, on obtient

$$y = \frac{-3}{2}x - \frac{1}{2}.$$



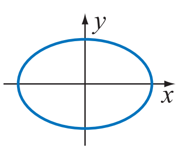
Droite passant par le point (–3; 4) et perpendiculaire à $2x - 3y + 4 = 0$.

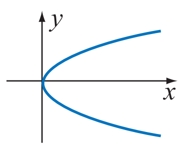
3.2 Exercices

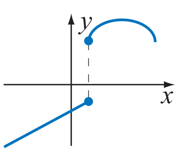
1. Trouver l'équation de la droite passant par les points donnés.
   a) (–3;2) et (7;1) b) (6;–3) et (–1;5)
   c) (4;–7) et (–3;3)

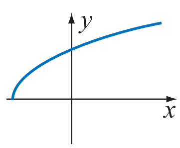
2. Trouver l'équation de la droite passant par le point P et de pente m.
   a) P = (8;2) et $m = -1/5$
   b) P = (–3;2) et $m = 3/4$
   c) P = (2;– 5) et $m = 4$

3. Dire si les graphiques suivants représentent des fonctions ou de simples relations.

a)


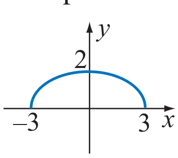
c)


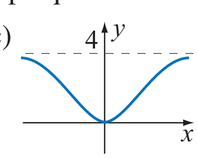
b)


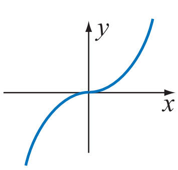
d)


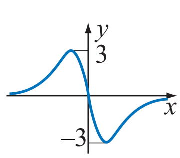
4. Déterminer si les équations suivantes définissent des fonctions.
   a) $3x + 4y - 5 = 0$ c) $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$
   b) $x^2 + 4y + 4 = 0$ d) $xy + 4y - 2x = 0$

5. Déterminer le domaine et le codomaine des fonctions représentées par les graphiques suivants.

a)


c)


b)


d)


6. Déterminer les zéros et l'ordonnée à l'origine des fonctions définies par les règles de correspondance suivantes.
   a) $f(x) = 5x - 2$ e) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$
   b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$
   c) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{2x+5}$ g) $f(x) = \sqrt{9-x}$
   d) $f(x) = \sqrt{x+5}$ h) $f(x) = \dfrac{5}{x-2}$

7. Trouver la préimage de c par la fonction dont la règle de correspondance est donnée.
   a) $c = 5$, $f(x) = x^2 + x - 7$
   b) $c = 7$, $f(x) = 3x - 2$

8. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}.$$
   a) Trouver la préimage de 4 par la fonction f.
   b) Trouver la préimage de 2 par la fonction f.
   c) Les valeurs 4 et 2 font-elles partie du codomaine de la fonction?
   d) Trouver la préimage d'un élément y quelconque par la fonction f.
   e) Dire à quelle condition un élément y fait partie de l'image de la fonction.

9. Déterminer le domaine et le codomaine des fonctions définies par :
   a) $f(x) = \sqrt{x-2}$
   b) $f(x) = \dfrac{x-9}{x-2}$

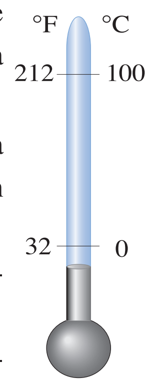
10. Trouver le domaine et le codomaine des fonctions définies par les règles de correspondance suivantes.
   a) $f(x) = 3x - 5$ f) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$
   b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ g) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$
   c) $f(x) = 2^x$ h) $f(x) = \sqrt{14 - 3x}$
   d) $f(x) = x^3$ i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

e) $f(x)=x^2-3x$

j) $f(x)=\dfrac{3x-2}{2x-5}$

11. Un technicien en réparation d'appareils de chauffage affiche un taux de 30 $ par demi-heure de travail. Cependant, il demande un supplément de 20 $ pour son déplacement.
    a) Déterminer le modèle mathématique décrivant le coût de la main-d'oeuvre pour les réparations d'appareils de chauffage effectuées par ce technicien.
    b) Déterminer le coût d'une réparation qui nécessite une demi-heure de travail.

12. Un thermomètre est gradué en degrés Celsius et en degrés Fahrenheit. Déterminer le modèle mathématique décrivant la relation entre les unités de mesure.



    a) Trouver la fonction exprimant la température en Celsius en fonction de la température en Fahrenheit.
    b) Esquisser le graphique de la fonction.
    c) Exprimer en Celsius les températures de 25 °F, 100 °F, 180 °F.
    d) Trouver la fonction exprimant la température en Fahrenheit en fonction de la température en Celsius.
    e) À quelle température a-t-on la même lecture sur les deux échelles ?

ANDERS CELSIUS

NH Celsius
NH Fahrenheit

13. Vous désirez faire planter une haie de cèdres autour de votre résidence et le spécialiste de l'aménagement paysager que vous consultez dit que le coût pour un tel travail comporte des frais fixes de 50 $ et des frais variables de 36 $ le mètre; ces frais variables incluent le creusage de la tranchée, la terre et les plants nécessaires.
    a) Quelle est la variable indépendante et quelle est la variable dépendante de cette situation ?
    b) Déterminer la fonction permettant d'évaluer le coût d'un tel travail.
    c) Votre terrain mesurant 20 m de largeur sur 32 m de profondeur, déterminer le coût si vous décidez de faire planter la haie sur un seul côté; sur les deux côtés; à l'arrière seulement; ou sur les côtés et à l'arrière.
    d) Vous contactez un autre entrepreneur qui déclare pouvoir planter une haie sur les deux côtés et à l'arrière pour la somme de 2 444 $. Sachant que les frais fixes sont également de 50 $, déterminer le coût par mètre de haie plantée.

14. L'entreprise de construction qui vous emploie attribue en sous-traitance la pose de pelouse sur le terrain des édifices qu'elle érige. Deux sous-traitants sont en lice pour l'attribution de ces contrats. La première entreprise demande 200 $ de frais fixes et 7,50 $ le mètre carré. La deuxième demande 80 $ de frais fixes et 7,80 $ le mètre carré.
    a) Déterminer dans chaque cas le modèle mathématique décrivant le coût en fonction de la superficie à couvrir. Représenter graphiquement les deux modèles sur un même système d'axes.
    b) Quel sera le montant demandé par chaque entrepreneur pour recouvrir une superficie de 300 m² ? de 600 m² ?
    c) À partir de quelle superficie la soumission du premier entrepreneur est-elle avantageuse ?

15. En vacances à l'île aux Coudres, vous envisagez de louer une bicyclette pour faire le tour de l'île. Deux entreprises de location offrent des bicyclettes. L'une demande 4 $ / h et l'autre propose un forfait de 6 $ plus 2 $ / h.
    a) Déterminer pour chaque cas le modèle mathématique décrivant le coût en fonction de la durée de la location. Représenter graphiquement les deux modèles sur un même système d'axes.
    b) Quel sera le coût pour une location de deux heures ? de quatre heures ?
    c) Pour quelle durée de location le coût est-il le même pour les deux entreprises ?

16. L'entreprise qui vous emploie doit remplacer temporairement un appareil nécessitant des réparations dont la durée pourrait être de deux à trois mois. Deux compagnies de location ont présenté une soumission. La première compagnie demande 10 $ par jour de location tous services inclus. La deuxième compagnie demande 6 $ par jour et des frais d'installation de 180 $. L'appareil est muni d'un dispositif qui détermine le nombre de jours d'utilisation pour tenir compte seulement des jours ouvrables dans la facturation. Vous devez préparer une étude comparative de ces offres pour le conseil d'administration qui devra choisir un fournisseur.
    a) Déterminer pour chaque cas le modèle mathématique décrivant le coût en fonction de la durée de la location. Représenter graphiquement les deux modèles sur un même système d'axes.
    b) Quel sera le coût pour une location de 30 jours ? de 90 jours ?
    c) Après analyse des modèles, quelle stratégie recommanderiez-vous au conseil d'administration pour le choix du fournisseur ?

17. Vous désirez faire nettoyer les tapis des bureaux de votre compagnie. Après avoir consulté les petites annonces, vous avez déniché une compagnie spécialisée dans le nettoyage des tapis pour les édifices commerciaux. Elle affiche les prix suivants:

    60 $ de frais fixes et 0,50 $ le mètre carré de tapis à nettoyer.

    a) Définir un modèle algébrique décrivant le coût en fonction de la superficie.
    b) Avant de faire appel à cette compagnie de nettoyage, vous souhaitez estimer approximativement l'ordre de grandeur du coût d'une telle opération pour vos bureaux. Vous estimez que la superficie à nettoyer est comprise entre 200 m^2 et 250 m^2. À l'aide du modèle, déterminer le coût pour le nettoyage d'une superficie de 200 m^2; de 250 m^2.
    c) La compagnie de nettoyage vous achemine une facture de 175 $. Déterminer, à l'aide du modèle, la superficie que la compagnie estime avoir traitée.
    d) Une compagnie rivale demande un montant fixe de 200 $ peu importe la superficie à traiter. Représenter graphiquement cette situation et déterminer à partir de quelle superficie il aurait été préférable de retenir les services de la deuxième compagnie.

18. L'entreprise qui vous emploie envisage de louer une automobile pour son représentant de commerce qui parcourt parfois jusqu'à 1 500 km par semaine. On vous demande de préparer, pour le conseil d'administration, un dossier permettant d'analyser le coût d'une telle location. Après avoir effectué des négociations avec une compagnie de location, vous avez obtenu le coût suivant :

    200 $ par semaine plus 0,52 $ le kilomètre parcouru.

a) Représenter graphiquement le lien entre les variables en cause.
b) Définir un modèle mathématique décrivant le lien entre les variables.
c) Utiliser le modèle mathématique pour estimer le coût de location hebdomadaire, sachant que le représentant parcourt en moyenne 700 km par semaine.
d) Pour tenir compte de la dépréciation, des réparations et du coût de l'essence, la politique de l'entreprise est de rembourser 0,74 $ le kilomètre lorsqu'un employé utilise sa voiture personnelle pour le travail. Déterminer s'il est plus avantageux pour la compagnie de louer une automobile pour son représentant ou de lui rembourser les frais d'utilisation de sa voiture personnelle.

19. Un groupe de cyclistes part en excursion et se déplace à une vitesse de 30 km/h. Une heure et quarante-cinq minutes plus tard, la camionnette transportant l'équipement lourd et la nourriture part à leur suite à une vitesse de 50 km/h.
a) Déterminer un modèle mathématique décrivant la distance parcourue par la camionnette en fonction du temps t à partir du moment où la poursuite est entamée.
b) Déterminer un modèle mathématique décrivant la distance parcourue par les cyclistes.
c) Représenter graphiquement ces modèles mathématiques sur un même système d'axes.
d) Dans cette représentation graphique, que représente l'abscisse du point de rencontre des droites ? Que représente l'ordonnée du point de rencontre des droites ?
e) Combien de temps faudra-t-il à la camionnette pour rejoindre le groupe et quelle sera alors la distance parcourue ?

20. Deux cyclistes partent simultanément de deux endroits distants de 300 km et se dirigent l'un vers l'autre. André part du point A et roule à 22 km/h, alors que Bertrand part du point B et roule à 26 km/h.
a) Exprimer, en fonction du temps, la distance par rapport au point A de chacun des cyclistes.
b) Représenter graphiquement les deux fonctions sur un même système d'axes.
c) Dans cette représentation graphique, que représente l'abscisse du point de rencontre des droites ? Que représente l'ordonnée du point de rencontre des droites ?
d) Déterminer dans combien de temps les deux cyclistes vont se rencontrer.
e) Déterminer la distance parcourue par chacun des cyclistes au moment de la rencontre.

21. Un service de photocopie demande 7 ¢ par page et 1,25 $ par reliure spirale.
a) Identifier la variable indépendante et la variable dépendante de cette situation.
b) Décrire mathématiquement la relation entre ces variables.
c) Représenter graphiquement cette relation.
d) Quel sera le coût pour reproduire un document de 240 pages ?
e) Déterminer le nombre de pages d'un document dont la reproduction a coûté 14,27 $.

3.3 DROITE DE RÉGRESSION

Lorsqu'on obtient des données à partir d'une expérience de laboratoire, d'un sondage ou d'une recherche, même si le phénomène peut être décrit par un modèle affine, il faut s'attendre à ce qu'il y ait une différence entre les valeurs observées et les valeurs décrites par le modèle. En effet, aucun modèle n'est une description exacte d'un phénomène expérimental. La règle de correspondance obtenue à partir de données expérimentales est un **modèle empirique** et sa fiabilité dépend de la précision des données expérimentales utilisées. Lorsqu'on étudie la relation entre les variables d'un phénomène pour lequel on dispose de données empiriques, la représentation graphique se révèle un moyen efficace pour déceler si le phénomène est descriptible par un modèle affine. Dans la pratique, on a plusieurs couples formant un nuage de points et on cherche à déterminer la droite qui décrit le plus fidèlement possible le phénomène.

Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés consiste à calculer :

$\overline{x}$, la moyenne des valeurs de la variable indépendante x;

$\overline{y}$, la moyenne des valeurs de la variable dépendante y;

$\overline{x^2}$, la moyenne des carrés des valeurs de la variable indépendante x;

$\overline{xy}$, la moyenne des produits des valeurs des deux variables.

On obtient ensuite les paramètres a et b de la droite recherchée en solutionnant le système d'équations

$$\begin{aligned}\overline{y} &= a\overline{x} + b\\ \overline{xy} &= a\overline{x^2} + b\overline{x}.\end{aligned}$$

Calcul des paramètres d'une droite de régression

Les valeurs moyennes des variables sont définies par

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},\quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n},\quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \text{ et } \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}.$$

Si on remplace les variables par ces expressions dans les équations

$$\overline{y} = a\overline{x} + b \text{ et } \overline{xy} = a\overline{x^2} + b\overline{x}$$

et qu'on isole les paramètres a et b, on obtient

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \text{ et } b = \frac{\sum y_i - a\sum x_i}{n}.$$

On peut utiliser directement ces expressions pour calculer les paramètres de la droite de régression.

PROCÉDURE

Calcul des paramètres d'une droite de régression

1. Représenter graphiquement les données afin de s'assurer que le modèle affine est approprié.
2. Pour simplifier le traitement et la gestion des données, construire un tableau en réservant une colonne à chacune des grandeurs n, x, y, xy et x^2. La dernière ligne du tableau contient les sommations utilisées dans les formules de a et de b.

EXEMPLE 3.3.1

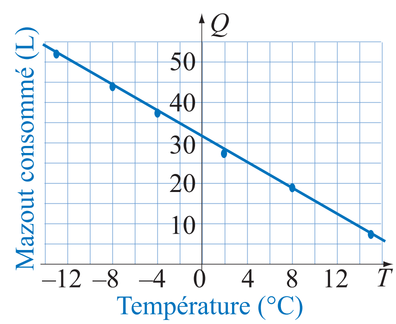
L'entrepreneur en construction pour lequel vous travaillez a décidé d'évaluer les coûts de chauffage des maisons qu'il construit afin de se servir de ce renseignement dans sa publicité. Il a noté, pour des périodes de 24 heures, la consommation moyenne de mazout en fonction de la température extérieure moyenne durant ces 24 heures. Les données qu'il a obtenues sont inscrites dans le tableau présenté ci-contre.

Trouver, par la méthode des moindres carrés, le modèle affine décrivant la relation entre la température et la quantité de mazout consommée.

RégAffine06

Consommation de mazout

T_i	Q_i
–13	52,0
–8	44,0
–4	36,8
2	28,0
8	18,0
15	6,8



Consommation de mazout

Valeurs observées			
T	Q	TQ	T^2
–13	52,0	–676,0	169
–8	44,0	–352,0	64
–4	36,8	–147,2	16
2	28,0	56,0	4
8	18,0	144,0	64
15	6,8	102,0	225
0	185,6	–873,2	542

Solution

Identification des variables

La quantité de mazout consommé Q (L) dépend de la température extérieure T (°C). La représentation graphique des données est un nuage de points (présenté ci-contre) qui évoque une droite, même si les points ne sont pas parfaitement alignés.

Définition du lien entre les variables

Pour déterminer la valeur des paramètres de la droite, il faut calculer les produits des valeurs correspondantes et le carré des valeurs de la variable indépendante, puis faire la somme des données et de ces résultats. On peut présenter tous les calculs dans un même tableau, dont la dernière ligne est réservée aux sommes des valeurs inscrites dans les colonnes. En utilisant les formules des paramètres, on obtient :

$$a = \frac{n\sum T_i Q_i - \left(\sum T_i\right)\left(\sum Q_i\right)}{n\sum T_i^2 - \left(\sum T_i\right)^2} = \frac{6\times(-873,2)-0\times 185,6}{6\times 542-(0)^2} = -1,611\ldots$$

$$b = \frac{\sum Q_i - a\sum T_i}{n} = \frac{185,6-(-1,611\ldots)\times 0}{6} = 30,93\ldots$$

Le modèle est donc $Q(T) = -1,611T + 30,93$.

Mesures de la précision du modèle

Le modèle mathématique construit est-il fiable? Il existe des mesures qui permettent de répondre partiellement à cette question. Ce sont la somme des carrés des résidus, le coefficient de corrélation et le coefficient de détermination.

RégAffine07

Calcul des résidus

On effectue le calcul de la somme des carrés des résidus. On peut effectuer le calcul de la somme des carrés des résidus à l'aide du tableau utilisé pour déterminer les paramètres du modèle affine. Ainsi, pour le dernier exemple on obtient le tableau complémentaire suivant.

Consommation de mazout

Valeurs observées				Valeurs du modèle	Résidus	Carrés des résidus
T_i	Q_i	T_iQ_i	T_i^2	$Q(T)$	R	R^2
–13	52,0	–676,0	169	51,877	0,123	0,015069
–8	44,0	–352,0	64	43,822	0,178	0,031722
–4	36,8	–147,2	16	37,378	–0,578	0,333638
2	28,0	56,0	4	27,711	0,289	0,083409
8	18,0	144,0	64	18,045	–0,045	0,002005
15	6,8	102,0	225	6,767	0,033	0,001070
0	185,6	–873,2	542			0,466913

Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation est une mesure de l'intensité du lien de linéarité entre deux variables. Il indique le degré de regroupement des points dans le voisinage de la droite. Il est défini par

$$r = \frac{n\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\sqrt{n\sum x_i^{\,2} - \left(\sum x_i\right)^2}\ \sqrt{n\sum y_i^{\,2} - \left(\sum y_i\right)^2}}.$$

Ainsi, pour le dernier exemple, on a

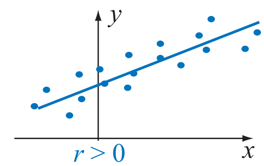
$$r = \frac{n\sum T_i Q_i - \left(\sum T_i\right)\left(\sum Q_i\right)}{\sqrt{n\sum T_i^{\,2} - \left(\sum T_i\right)^2}\ \sqrt{n\sum Q_i^{\,2} - \left(\sum Q_i\right)^2}}.$$

Le tableau du dernier exemple donne quatre des sommes apparaissant dans la formule de r. Il manque seulement $\sum Q_i^2$. On peut donc facilement calculer le coefficient de corrélation :

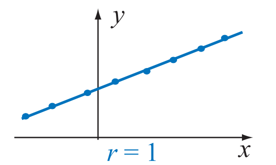
$$r = \frac{6\times(-873{,}2) - 0\times 185{,}6}{\sqrt{6\times 542 - (0)^2}\ \sqrt{6\times 7\ 148{,}48 - (185{,}6)^2}} = -0{,}999\ 8.$$

Le coefficient de corrélation linéaire r est un nombre compris entre –1 et 1 ($-1 \le r \le 1$). Lorsque $r = 0$ (corrélation nulle), le modèle affine n'est pas du tout approprié au phénomène. Lorsque r est proche de 1 ou de –1, le regroupement des points dans le voisinage de la droite est important. Si la valeur de r est positive, les variables varient dans un même sens, c'est-à-dire que la valeur de la variable dépendante augmente lorsque la valeur de la variable indépendante augmente. Si la valeur de r est négative, les valeurs des variables varient en sens inverse, c'est-à-dire que la valeur de la variable dépendante diminue lorsque la valeur de la variable indépendante augmente. L'exemple précédent illustre le dernier cas : la quantité de mazout consommée diminue lorsque la température augmente. De plus, le coefficient r est –0,999 8, ce qui est très proche de –1. La corrélation est donc très forte.

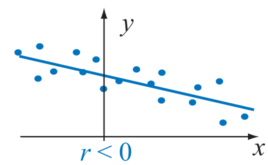
Le coefficient de détermination est le carré du coefficient de corrélation. Il est une mesure de la pertinence d'utiliser un modèle affine en faisant abstraction du fait que la corrélation peut être positive ou négative. C'est une mesure de l'adéquation entre le modèle et les données observées.



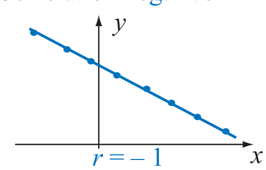
Corrélation positive



Corrélation positive parfaite



Corrélation négative



Corrélation négative parfaite

Droite de tendance

La droite de régression permet de construire un modèle simple, utilisé pour analyser des phénomènes ou décrire une tendance. On l'appelle alors **droite de tendance**. On distingue deux cas dans l'analyse de tendance, selon que les valeurs estimées sont à l'intérieur ou à l'extérieur de l'ensemble des données observées.

Interpolation

Lorsque les prévisions portent sur des valeurs à l'intérieur de l'intervalle des données, le processus est appelé **interpolation**. Généralement, les estimations par interpolation sont plutôt fiables.

Extrapolation

Si les prévisions portent sur des valeurs à l'extérieur de l'ensemble des données, le processus est appelé **extrapolation**. Il est à noter que la fiabilité est plus grande lorsqu'on fait des prédictions pour des valeurs proches de l'ensemble des données observées. Une prédiction portant sur une valeur éloignée de cet intervalle donne une estimation qui, sans être à rejeter, doit être utilisée avec circonspection. Dans les deux cas, il ne faut pas s'attendre à ce que le modèle soit plus précis que les données qu'il décrit.

EXEMPLE 3.3.2

Une association d'automobilistes a demandé à ses membres de lui communiquer la distance qu'ils avaient parcourue et le coût d'utilisation pour la dernière année en incluant les frais d'enregistrement, les assurances, l'essence et l'entretien. L'association a dressé le tableau suivant de ces données pour la voiture la plus populaire auprès de ses membres.

a) Trouver un modèle mathématique décrivant la correspondance entre les variables.

b) Donner une mesure de la précision du modèle par le calcul des résidus.

c) Prévoir, à l'aide du modèle, le coût d'utilisation de cette voiture pour une distance annuelle de 45 000 km.

Coût d'utilisation

Distance (km)	Coût ($)
5 000	4 080
10 000	5 420
15 000	6 580
20 000	7 720
25 000	9 080
30 000	10 340

Solution

a) Dans cette situation, le coût d'utilisation annuel dépend de la distance parcourue. Représentons graphiquement ces données.

Pour obtenir la valeur des paramètres de la droite, il faut calculer les produits des valeurs correspondantes et le carré des valeurs de la variable indépendante.

Coût d'utilisation

Valeurs observées			
D milliers de km	C milliers de $	DC	D^2
5,0	4,08	20,4	25
10,0	5,42	54,2	100
15,0	6,58	98,7	225
20,0	7,72	154,4	400
25,0	9,08	227,0	625
30,0	10,34	310,2	900
105	43,22	864,9	2 275

Après avoir complété les quatre premières colonnes, on peut calculer les paramètres, ce qui donne

$$a = \frac{n\sum D_iC_i - \left(\sum D_i\right)\left(\sum D_i\right)}{n\sum D_i^2 - \left(\sum D_i\right)^2}$$

$$= \frac{6\times 864,9 - 105\times 43,22}{6\times 2\,275 - (105)^2} = 0,248\ 114\ ...$$

$$b = \frac{\sum C_i - m\sum D_i}{n} = \frac{43,22 - 0,248\ 114\ ...\times 105}{6} = 2,861\ 333\ ...$$

Le modèle est donc

$$C(D) = 0,25D + 2,86.$$

b) Pour avoir une mesure de la précision, on fait le calcul des résidus.

Calcul des résidus

Valeurs observées				
D milliers de km	C milliers de $	$C(D)$	R	R^2
5,0	4,08	4,11	–0,03	0,0009
10,0	5,42	5,36	0,06	0,0036
15,0	6,58	6,61	–0,03	0,0009
20,0	7,72	7,86	–0,14	0,0196
25,0	9,08	9,11	–0,03	0,0009
30,0	10,34	10,36	–0,02	0,0004
105	43,22			0,0263

On a la somme des carrés des résidus, soit 0.0263. La somme des carrés des résidus nous indique que la droite ne recouvre pas chacun des points. Le coefficient de corrélation est 0,999 ..., ce qui indique également que le modèle est très fiable.

c) Puisque

$$C(45) = 0,25\times 45 + 2,86 = 14,11$$

Le modèle donne une estimation de 14 110 $.

REMARQUE

Le calcul des résidus donne des indications sur la validité du modèle, mais dans chaque situation, son analyse doit prendre en compte le contexte. Il se peut, par exemple, que pour une même valeur de la somme des résidus, les points soient tous du même côté de la droite ou encore, dispersés de part et d'autre de celle-ci. Le coefficient de corrélation donnera de l'information supplémentaire dans un tel cas. Il faut aussi tenir compte de l'ordre de grandeur des données. Ainsi, une valeur de la somme du carré des résidus peut sembler élevée tout en étant petite par rapport à l'ordre de grandeur des données. Une réflexion doit donc accompagner les mesures de validité du modèle à l'étape de l'interprétation dans le contexte. Un traitement approfondi des mesures de validité englobant tous les types de situations dépasse cependant les objectifs de cet ouvrage. En effet, une telle analyse nécessite la prise en compte de plusieurs paramètres, comme par exemple, le nombre de données et la fiabilité des instruments de mesure.

Fonctions comportant une valeur absolue

Valeur absolue

La **valeur absolue** d'une expression algébrique u est définie de la façon suivante :

$$|u| = \begin{cases} -u & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$$

EXEMPLE 3.3.3

Déterminer le domaine et représenter graphiquement :

a) $f(x) = |2x - 3|$ b) $g(x) = \dfrac{|2x-3|}{2x-3}$

Équations06

K_FonctValAbsolue

Solution

a) En utilisant la définition de valeur absolue, on a :

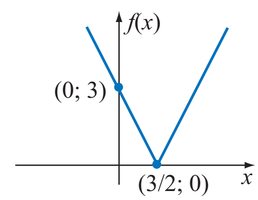
$$|2x-3| = \begin{cases} -(2x-3) & \text{si } (2x-3) < 0 \\ 2x-3 & \text{si } (2x-3) \geq 0 \end{cases}$$

Pour toute valeur de x, on peut calculer l'image correspondante. Par conséquent, le domaine est :

$$\text{dom}_f = \mathbb{R}.$$

Si $(2x - 3) < 0$, on a $x < 3/2$ et $y = -(2x - 3) = -2x + 3$. Dans l'intervalle $]-\infty; 3/2[$, le graphique de la fonction est un segment de droite dont la pente est -2 et l'ordonnée à l'origine est 3.

Si $x = 3/2$, on a $y = 0$ et si $x > 3/2$, on a $y = 2x - 3$. Dans l'intervalle $[3/2; \infty\,[$, le graphique de la fonction est un segment de droite partant du point $(3/2; 0)$ et dont la pente est 2. La représentation graphique est donnée ci-contre.



$f(x) = |2x - 3|$

b) Si $x = 3/2$, la fonction n'est pas définie et :

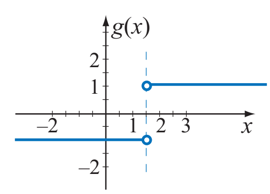
$$\text{dom}_g = \mathbb{R}\setminus\{3/2\}.$$

En appliquant la définition de valeur absolue, on a :

$$\frac{|2x-3|}{2x-3} = \begin{cases} \dfrac{-(2x-3)}{2x-3} = -1 & \text{si } (2x-3) < 0 \\ \dfrac{2x-3}{2x-3} = 1 & \text{si } (2x-3) > 0 \end{cases}$$

Si $x < 3/2$, on a $y = -1$. Le graphique de la fonction est un segment de droite horizontal à $y = -1$ dans l'intervalle $]-\infty; 3/2[$.

Si $x > 3/2$, on a $y = 1$. Le graphique de la fonction est un segment de droite horizontal à $y = 1$ dans l'intervalle $]3/2; \infty[$. La représentation graphique est donnée ci-contre.



$f(x) = \dfrac{|2x-3|}{2x-3}$

REMARQUE

Dans la représentation graphique, le symbole ○ signifie que le point à l'extrémité du segment n'est pas inclus alors que le symbole ● signifie que le point à l'extrémité est inclus.

Dans l'exemple 3.3.3*a*, on aurait pu directement définir la fonction de la façon suivante :

$$f(x)=\begin{cases} -(2x-3) & \text{si } (2x-3)<0 \\ 2x-3 & \text{si } (2x-3)\geq 0 \end{cases}$$

On dit alors que la fonction est définie par parties.

Fonctions définies par parties

L_FonctParties

Fonction définie par parties

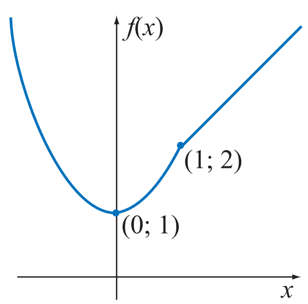
Une **fonction définie par parties** est une fonction dont la définition comporte plusieurs règles de correspondance, chacune n'étant valide que sur un intervalle particulier ou pour une valeur particulière.

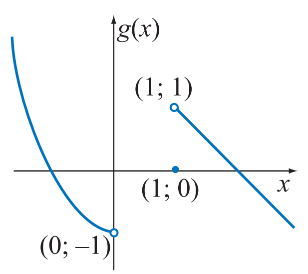
EXEMPLE 3.3.4

Donner le domaine et esquisser le graphique des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<1 \\ x+1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=1 \\ 2-x & \text{si } x>1 \end{cases}$





Solution

a) La fonction f est définie pour tout nombre réel, on a donc :

$$\text{dom}_f = \mathbb{R}.$$

Dans l'intervalle $]-\infty; 1[$, le graphique est un segment de la parabole dont l'axe de symétrie est $x = 0$ et le sommet est $(0; 1)$.

Dans l'intervalle $[1; \infty[$, le graphique est un segment de la droite dont la pente est 1 et l'ordonnée à l'origine est 1. Les deux segments se joignent au point $(1; 2)$. Le graphique est donné ci-contre.

b) La fonction g est définie seulement si $x < 0$ ou $x \geq 1$, on a donc :

$$\text{dom}_g =]-\infty; 0[\cup [1; \infty[.$$

Dans l'intervalle $]-\infty; 0[$, le graphique est un segment de la parabole dont l'axe de symétrie est $x = 0$ et le sommet est $(0; -1)$.

À $x = 1$, l'image est 0.

Dans l'intervalle $]1; \infty[$, le graphique est un segment de la droite dont la pente est -1 et l'ordonnée à l'origine est 2. Les segments sont disjoints. Le graphique est donné ci-contre.

M_FonctPartieEntière

Fonction partie entière

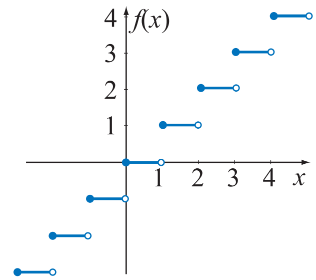
La **fonction partie entière** de x, notée $f(x)=[\![x]\!]$ est la fonction qui à x fait correspondre le plus grand entier plus petit ou égal à x, c'est-à-dire :

$$[\![x]\!]=k \text{ si } k\leq x<k+1, \text{ où } k\in\mathbb{Z}.$$

EXEMPLE 3.3.5

Donner le domaine et esquisser le graphique de la fonction définie par

$$f(x) = [\![x]\!]$$



Solution

Le domaine de la fonction est l'ensemble des nombres réels.

Pour en esquisser le graphique, on peut déterminer quelques correspondances.

$[\![-2,7]\!] = -3$, puisque $-3 \le -2,7 < -2$,

$[\![0,4]\!] = 0$, puisque $0 \le 0,4 < 1$,

$[\![2,5]\!] = 2$, puisque $2 \le 2,5 < 3$.

x	–2,7	–1,5	–0,8	0,4	1,2	2,5
$[x]$	–3	–2	–1	0	1	2

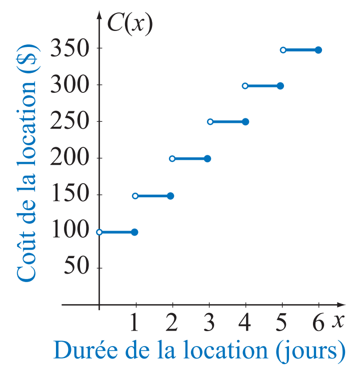
EXEMPLE 3.3.6

Une entreprise de location d'outils affiche les prix suivants pour la location d'un compacteur à pierre concassée :

100$ la première journée et

50$ par journée additionnelle, complète ou non.

Décrire symboliquement la correspondance entre la durée et le coût de location, donner son domaine de validité et représenter graphiquement cette fonction.



Solution

Soit x, le nombre de journées de location et C, le coût de location. La fonction décrivant la correspondance entre la durée et le coût de location est :

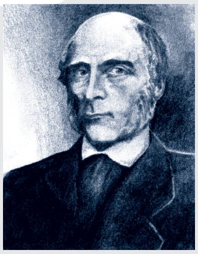
$$C(x) = \begin{cases} 100 + 50[\![x]\!] & \text{si } x \ne [\![x]\!] \\ 100 + 50(x-1) & \text{si } x = [\![x]\!] \end{cases}$$

Le modèle est valide pour $x > 0$. La représentation graphique est donnée ci-contre.

Un peu *d'histoire*

SIR FRANCIS GALTON

1822-1911



Le physiologiste Francis Galton est né à Birmingham en Grande-Bretagne. Il était cousin de Charles Darwin. Il fut l'un des fondateurs de l'eugénisme qui est l'étude des conditions favorables au maintien de la qualité de la race humaine. Il s'est également fait connaître par sa contribution à l'élaboration de la méthode statistique. Dans son traité *Hereditary genius* (1869), il a consacré un chapitre à l'hérédité des scientifiques.

C'est à la suite de ses études sur l'hérédité qu'il avait découvert que des parents de petite taille avaient des enfants plus petits que la moyenne, mais plus grands que leurs parents. De même, des parents plus grands que la moyenne avaient des enfants plus grands que la moyenne, mais plus petits que leurs parents. Ce phénomène est une régression par rapport à la moyenne et c'est de là que vient l'appellation *droite de régression*. Il serait intéressant de vérifier si cette constatation est toujours valable de nos jours…

3.4 Exercices

1. Votre compagnie entend commercialiser un nouvel appareil électronique permettant d'éliminer les insectes les soirs de pleine lune. Une étude de marché a été effectuée avant de fixer le prix de ce produit. Les résultats de l'étude sont compilés dans le tableau suivant.

Prix de l'article	Volume de vente annuel
250	1 200
300	1 050
350	975
400	850
450	775
500	650

   a) Quelle est la variable indépendante et quelle est la variable dépendante de cette situation ?
   b) Déterminer la règle de correspondance entre le prix de l'article et le nombre de clients potentiels.
   c) Faire un tableau donnant le nombre de clients prédit par le modèle mathématique pour chacun des prix choisis pour l'étude.
   d) Estimer la précision du modèle à l'aide des résidus et du coefficient de corrélation.

2. Une entrepreneure en construction a décidé d'évaluer les coût de chauffage des maisons qu'elle construit afin de se servir de ce renseignement dans sa publicité. Elle a fait faire le relevé de la consommation moyenne de mazout en fonction de la température à l'extérieur. Les relevés ont été faits pour des périodes de 24 heures en fonction de la température moyenne durant ces 24 heures. Les données obtenues ont été compilées dans le tableau suivant

T (°F)	Q (L)
– 11	48,0
– 7	41,0
– 1	32,0
2	27,0
6	20,0
12	11,0

   a) Représenter graphiquement les données.
   b) Trouver le modèle affine décrivant la relation entre la température et la quantité de mazout consommée.
   c) Évaluer la quantité de mazout consommée en une journée lorsque la température extérieure est de 9 °F.
   d) Si la moyenne des températures en janvier est de – 12 °F, estimer la consommation mensuelle de mazout.
   e) Évaluer la quantité de mazout consommée en une journée lorsque la température extérieure est de – 20 °F.

3. Le propriétaire d'une salle de cinéma de 800 places veut tenter de déterminer l'influence du prix d'entrée sur le nombre de spectateurs. Il décide donc de fixer des prix différents pour chacun des samedis du mois et, à la fin du mois, il a recueilli les données suivant.

Prix d'entrée	Nombre de spectateurs
8,50	404
8,00	506
7,50	600
7,00	706

   a) Représenter graphiquement les données.
   b) Identifier la variable indépendante et la variable dépendante.
   c) Déterminer un modèle affine décrivant la relation entre le prix d'entrée et le nombre de spectateurs.
   d) Quel prix d'entrée devrait-il fixer pour que toutes les places soient occupées ?
   e) Quelle partie du domaine de ce modèle correspond au phénomène à l'étude ?

4. Vous travaillez pour une entreprise d'entretien ménager d'édifices. Il est très important pour l'entreprise d'estimer le mieux possible le temps nécessaire à l'entretien d'un édifice avant de faire une soumission. Le coût que la compagnie demande dans ses soumissions dépend de cette estimation. La compagnie effectue déjà l'entretien de différents

édifices et elle a établi un tableau donnant la superficie de chacun et le temps nécessaire pour en faire l'entretien.

Superficie (milliers de m^2)	Nombre d'heures par semaine
87	320
81	400
69	260
64	388
60	325
51	284
44	227
39	180
28	125

a) Représenter graphiquement les données.
b) À l'aide de ces données, établir un modèle décrivant la relation entre le temps consacré à l'entretien et la superficie.
c) La compagnie doit soumissionner pour l'entretien d'un édifice de 56 000 m^2. Estimer le temps d'entretien à l'aide du modèle que vous avez construit.
d) Calculer le coefficient de corrélation. Que vous indique ce coefficient ?

5. Une petite compagnie gère neuf stations d'essence ayant la même enseigne. Cependant, le chiffre d'affaires varie d'une station à l'autre. Le conseil d'administration a décidé de faire réaliser une étude pour voir s'il existe un lien entre le nombre moyen de véhicules qui circulent quotidiennement devant une station-service et son volume de ventes. Les données obtenues sont consignées dans le tableau suivant.

Station	Nombre de litres par mois	Nombre moyen de véhicules par jour
1	14 000	330
2	15 000	410
3	11 000	260
4	12 000	350
5	8 000	300
6	7 000	280
7	9 000	210
8	8 000	180

a) Représenter graphiquement les données.
b) À l'aide de ces données, établir un modèle décrivant la relation entre le nombre moyen de véhicules qui circulent quotidiennement devant la station et le volume des ventes.
c) La compagnie souhaite implanter une dixième station-service. Quel devrait être l'achalandage minimal de la rue pour que le volume des ventes soit plus élevé que 10 000 L ?
d) Calculer le coefficient de corrélation. Que vous indique ce coefficient ?

6. À la suite d'une étude de marché, un fabricant de chaussures a reçu les données ci-contre sur la relation entre le prix de vente de ses produits et le nombre de paires vendues annuellement.

Prix ($)	Ventes annuelles en milliers de paires
37	35
39	29
41	24
43	18
45	12

a) Représenter graphiquement les données.
b) Établir la règle de correspondance entre le prix et le volume des ventes.
c) Calculer le coefficient de corrélation. Que vous indique ce coefficient ?

7. Votre compagnie fabrique, entre autres choses, des étuis à crayons. Constatant que les ventes ont baissé au cours des dernières années, vous décidez de voir s'il est possible de redresser la tendance du marché. Vous faites relever le volume des ventes ainsi que le prix au cours des dernières années. Les résultats sont donnés ci-contre, la comparaison étant effectuée en dollars constants.

Année	Prix ($)	Ventes annuelles en milliers
1982	1,50	35
1983	1,75	31
1984	1,95	28
1985	2,30	24
1986	3,00	10

a) Représenter graphiquement les données.
b) À l'aide de ces données, établir un modèle décrivant la relation entre le prix et le volume des ventes.
c) La compagnie désire écouler ce qu'elle peut produire sans demander aux travailleurs de faire des heures supplémentaires et sans arrêter ses autres productions, soit 20 000 étuis. Quel devrait être le prix pour écouler cette production ?
d) Calculer le coefficient de corrélation. Que vous indique ce coefficient ?

8. Au cours des derniers mois, vous avez augmenté sensiblement le prix de vente d'un des articles que fabrique votre usine. Il s'en est suivi une baisse des ventes qui n'est pas sans vous inquiéter. Vous demandez donc un relevé des ventes pour déterminer l'impact des hausses de prix sur la demande.

Mois	Prix ($)	Volume de ventes
Janvier	25	483
Février	30	441
Mars	35	392
Avril	40	338
Mai	45	286

a) Représenter graphiquement les données.
b) À l'aide de ces données, établir un modèle décrivant la relation entre le prix et le volume des ventes.
c) La compagnie désire écouler ce qu'elle peut produire sans demander aux travailleurs de faire des heures supplémentaires et sans arrêter ses autres productions, soit 400 unités par mois. Quel devrait être le prix pour écouler cette production ?
d) Calculer le coefficient de corrélation. Que vous indique ce coefficient ?

9. Vous devez finaliser une étude pour voir s'il y a un lien entre le nombre de logements mis en chantier et le taux hypothécaire annuel. L'étude porte plus précisément sur le mois de juin et les données ci-contre ont été recueillies.

Année	Taux hypothécaire	Nombre de logements
1981	18,55 %	9 000
1982	19,75 %	3 500
1983	13,00 %	10 100
1984	14,50 %	7 800
1985	11,75 %	8 800

a) Représenter graphiquement les données.
b) À l'aide de ces données, établir un modèle décrivant la relation entre le taux hypothécaire et le nombre de mises en chantier.
c) Calculer le coefficient de corrélation. Que vous indique ce coefficient ?

10. La direction des ressources humaines d'une compagnie a décidé de réaliser une étude sur l'âge des employés et le nombre de journées d'absence dans l'année. Le dossier de chaque employé a été consulté et les données du tableau ci-contre ont été recueillies.

Âge de l'employé	Nombre de jours d'absence
32	11
44	7
27	6
35	3
24	10
43	15
54	8
63	10
49	13
57	17
39	7
47	6

a) Représenter graphiquement les données et déterminer ;a droite de régression
b) Calculer le coefficient de corrélation. Que vous indique ce coefficient ?

11. Une association d'automobilistes a demandé à ses membres de noter la distance qu'ils ont parcourue et le coût d'utilisation de leur véhicule au cours de la dernière année, en incluant les coûts de l'immatriculation, des assurances, de l'essence et de l'entretien. L'association a dressé le tableau suivant à l'aide des informations reçues pour la voiture la plus populaire auprès de ses membres.

Distance (km)	Coût ($)
5 000	3 950
10 000	4 860
15 000	5 740
20 000	6 600
25 000	7 520
30 000	8 460

a) Construire un modèle mathématique décrivant la correspondance entre les deux variables.

b) Donner une mesure de la précision du modèle en calculant les résidus.

c) Prévoir, à l'aide du modèle, le coût d'utilisation de la voiture en question dans le cas où la distance parcourue en une année est de 45 000 km.

12. Une entreprise veut mettre sur le marché un nouveau modèle d'armoire avec serrure destinées à entreposer les médicaments hors de la portée des enfants. Elle a effectué une étude de marché afin de fixer le prix de ce produit. Les résultats de l'étude sur le prix et le volume estimé des ventes annuelles, sont présentés dans le tableau suivant.

Prix ($)	Volume des ventes
35	540
40	492
45	458
50	406
55	336
60	294

a) Déterminer la règle de correspondance entre le prix de l'article et le nombre de clients potentiels.

b) Estimer la précision du modèle à l'aide des résidus et du coefficient de corrélation.

13. On a réalisé une étude de marché avant de commercialiser de petites remises de jardin, conçues pour être fixées à un mur de la maison ou du garage. L'étude de marché a été effectuée afin de fixer le prix du produit. Les résultats de l'étude sur le prix et le volume estimé des ventes annuelles sont présentés dans le tableau suivant.

Prix ($)	Volume des ventes
220	1 400
240	1 250
270	950
300	800
320	650
340	500

a) Déterminer la règle de correspondance entre le prix de l'article et le nombre de clients potentiels.

b) Estimer la précision du modèle à l'aide des résidus et du coefficient de corrélation.

14. Déterminer le domaine, le codomaine, les coordonnées du point sommet, le zéro, l'ordonnée à l'origine et représenter graphiquement les fonctions.

a) $f(x) = |x - 2|$

b) $f(x) = -|x + 4|$

c) $f(x) = 2 - |x + 3|$

d) $f(x) = |2x + 4| - 4$

15. Trouver la préimage de 3 par les fonctions suivantes :

a) $f(x) = |x - 2|$

b) $f(x) = -|x + 4|$

c) $f(x) = 2 - |x + 3|$

d) $f(x) = |2x + 4| - 4$

16. Représenter graphiquement la relation définie par la règle de correspondance :

$$f(x) = \frac{3|x|}{x}.$$

a) Déterminer le domaine et le codomaine de cette correspondance.

b) Cette règle de correspondance est-elle une fonction? Justifier.

17. Représenter graphiquement la relation définie par la règle de correspondance :

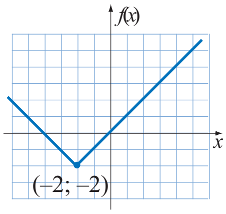
$$|x| + |y| = 6.$$

a) Déterminer le domaine et l'image de cette correspondance.

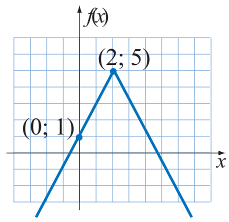
b) Cette règle de correspondance est-elle une fonction? Justifier.

18. En utilisant les valeurs absolues, écrire la règle de correspondance de la fonction dont la représentation graphique est donnée.

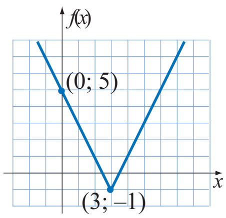
a)



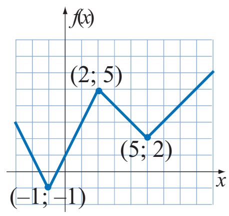
c)



b)



d)



19 Un réservoir contient 650 litres de liquide. On désire vidanger le réservoir, c'est-à-dire changer le liquide chargé d'impuretés pour du liquide propre. Cependant, on ne vide jamais entièrement le réservoir car cela pourrait endommager le système de pompage. La procédure consiste à diminuer le contenu à 50 litres et emplir le réservoir de nouveau. Durant l'opération, le débit est de cinquante litres à la minute (50 L/min).

a) Représenter graphiquement le volume de liquide dans le réservoir t minutes après le déclenchement de l'opération de vidange.

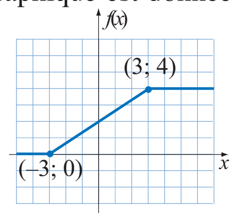
b) En utilisant les valeurs absolues, décrire algébriquement le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps t durant l'opération de vidange.

c) Quel est le domaine de validité de ce modèle?

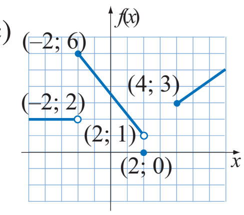
d) À l'aide du modèle déterminer à quel moment le volume de liquide sera de 300 L.

20. En utilisant une correspondance par parties, décrire algébriquement la fonction dont la représentation graphique est donnée.

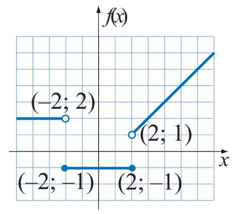
a)



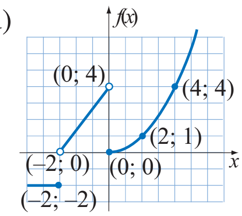
c)



b)



d)



21. La grille de tarification de l'Hydro-Québec pour la consommation domestique est la suivante.

TARIF DOMESTIQUE	
Redevance d'abonnement	0,4064 \$/jour
30 premiers kW·h par jour	0,0522 \$/kW·h
Le reste de la consommation	0,0683 \$/kW·h

a) Identifier la variable dépendante du problème et indiquer de quoi elle dépend.

b) Un client a consommé 1 890 kW.h pour une période de 36 jours. Déterminer le montant de sa facture.

c) Un client a consommé 3 230 kW.h pour une période de 54 jours. Déterminer le montant de sa facture.