Un peu *d'histoire*

MODÉLISATION D'UNE POPULATION

On doit à Fibonacci (1175-1250) le premier modèle décrivant l'évolution d'une population. La solution du problème posé par Fibonacci est une suite de nombres définis par récurrence et appelée « suite de Fibonacci ». (NH Fibonacci01)

Dans son *Essai sur le principe de la population* publié en 1798, Thomas Malthus (1766-1834) soutient la thèse qu'une population en croissance libre croît selon une progression géométrique et que les ressources croissent selon une progression arithmétique. Traduite en équations différentielles, la thèse de Malthus signifie que le taux de croissance de la population est de la forme

$$\frac{dP}{dt} = aP, \text{ où } a \text{ est une constante,}$$

alors que le taux de croissance des ressources est

$$\frac{dR}{dt} = b, \text{ où } b \text{ est une constante.}$$

La taille de la population est alors décrite par un modèle exponentiel qui est une version continue d'une croissance exponentielle.

Dans son essai, Malthus s'intéresse à la population humaine et prône le contrôle des naissances car la quantité limitée de ressources mène forcément à une compétition pour l'obtention de ces ressources et que les individus les plus aptes et les plus forts finissent par l'emporter. Cet article a influencé Charles Darwin (1809-1882). Celui-ci s'était déjà initié à la notion de sélection artificielle auprès des éleveurs de pigeons et il a étendu la notion de compétition pour la survie à toutes les espèces vivantes, ce qui l'a mené à l'idée de sélection naturelle.

Pour introduire une régulation en tenant compte des ressources disponibles qui freinent freinant la croissance, Pierre-François Verhulst (1804-1849) ajoute un facteur à l'équation différentielle décrivant le taux de croissance d'une population. L'équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{dP}{dt} = aP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

et la taille de la population est décrite par un modèle de la forme

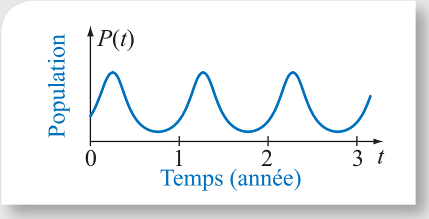
$$P(t) = \frac{M}{1 + b_0 e^{-at}}, \text{ où } b_0 = \frac{M - P_0}{P_0}.$$

La courbe représentant graphiquement cette fonction est appelée **courbe logistique.**

Dans l'étude de certaines populations animales, il faut tenir compte du fait que la quantité de ressources alimentaires disponible peut varier au gré des saisons.

On peut obtenir, par exemple, une équation de la forme

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(\alpha t - \phi)$$

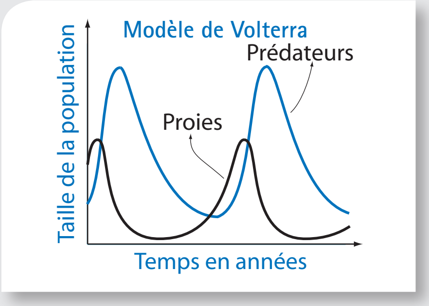


Pour étudier de façon plus précise la dynamique d'une population animale, il faut tenir compte de la prédation. La prédation comme la chasse et la pêche est normalement soumise à un quota fixe q qui est représenté par un terme constant comme dans l'équation

$$\frac{dP}{dt} = aP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - q$$

La prédation désigne aussi la relation entre deux espèces animales, un prédateur et sa proie. La dynamique de prédateur-proie a été étudiée indépendamment par Vito Volterra (1860-1940) (NH Volterra) et Alfred James Lotka (1880-1949). Volterra a étudié la dynamique des populations de requins et de sardines en Méditerranée et Lotka les populations de linx et de lièvres au Canada[1]. Les équations différentielles de Lotka-Volterra sont de la forme

$$\frac{dS}{dt} = aS - bSR = SR\left(\frac{a}{R} - b\right)$$
$$\frac{dR}{dt} = -cR + dSR = SR\left(-\frac{c}{S} + d\right).$$



Un autre modèle de fonction de croissance d'une population limitée a été défini par le mathématicien britannique Benjamin Gompertz (1779 -1865) cette fonction est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = c\ln\left(\frac{K}{P}\right)P,$$

où c est une constante et K la capacité maximale.

1. http://accromath.uqam.ca/contents/pdf/PredateursProies.pdf