Georg Cantor
1845-1918

C'est en partie grâce aux travaux de Georg Cantor (1845-1918) que l'infini est devenu objet d'études mathématiques, pour acquérir définitivement ses lettres de noblesse par l'arithmétisation de l'analyse.

Georg Cantor

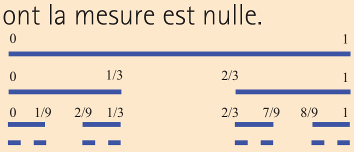
Georg Cantor est né à St-Pétersbourg en Russie où il fréquente l'école primaire. La santé fragile de son père conduit la famille, en quête d'un climat moins rude, à émigrer en Allemagne en 1856. Cantor y fait ses études secondaires. Après des études en mathématiques, il obtient son doctorat de l'université de Berlin en 1867 et débute sa carrière de professeur dans cette même ville. En 1872, il commence à correspondre avec Richard Dedekind qu'il a rencontré lors d'un séjour en Suisse.

En 1873, il démontre que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable et en 1874, que celui des nombres réels n'est pas dénombrable. Le 5 janvier 1874, il écrit à Dedekind pour lui expliquer comment il a défini une fonction faisant correspondre à chaque point d'un segment de droite unitaire, un et un seul point du carré de côté unitaire. Cantor est célèbre pour sa théorie des ensembles, sa théorie des infinis et sa construction des nombres réels.

L'ensemble de Cantor

En 1883, Cantor a publié son fameux ensemble triadique (poussières de Cantor). Il prend l'intervalle [0,1] et retire le tiers central en conservant les extrémités.

Ensuite, il enlève le tiers central de chacun des nouveaux segments et ce, indéfiniment. Le résultat troublait à l'époque puisqu'il s'agit d'un ensemble qui contient une quantité non-dénombrable de points mais dont la mesure est nulle.



Ensembles dénombrables

Georg Cantor a développé la théorie des ensembles. Dans cette théorie, un ensemble est « dénombrable » si on peut définir une bijection entre cet ensemble et l'ensemble des nombres naturels. Ainsi, l'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des nombres premiers, l'ensemble des nombres triangulaires, l'ensemble des nombres carrés sont des ensembles dénombrables.

Cantor a de plus démontré que l'ensemble des nombres rationnels était dénombrable. Ce résultat est important et inattendu parce que l'ensemble des nombres rationnels est un ensemble *dense*, ce qui signifie qu'entre deux nombres rationnels donnés, il est toujours possible de trouver un autre nombre rationnel et en fait, une infinité d'autres nombres rationnels. Par exemple, entre 0 et 1, on trouve les rationnels

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

entre 0 et 1/2, on trouve les rationnels

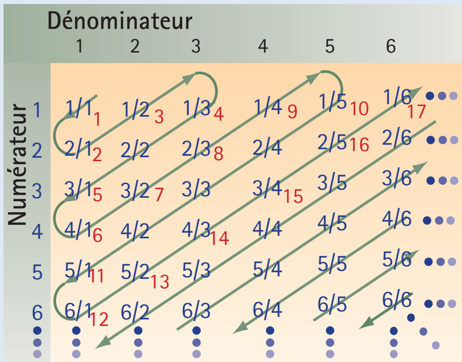
$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \ldots$$

entre 0 et 1/4, on trouve les rationnels

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{3}{13}, \frac{4}{17}, \frac{5}{21}, \ldots, \frac{n}{4n+1}, \ldots$$

Intuitivement, cette propriété de densité porte à penser que la cardinalité de l'ensemble des rationnels est plus grande que celle des naturels, mais Cantor a montré que ce n'était pas le cas. La difficulté de la démonstration consistait à définir une bijection en tenant compte de la nature des deux ensembles. En effet, il faut s'assurer qu'à chaque nombre rationnel est associé un nombre naturel et un seul et, réciproquement, qu'à chaque nombre naturel est associé un et un seul nombre rationnel. Pour définir cette correspondance, Cantor a disposé les nombres de la façon suivante :

On peut écrire tous les nombres ration-

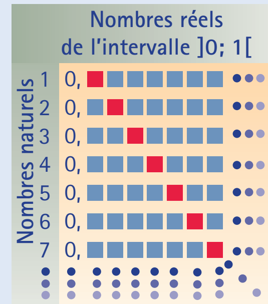


nels en les disposant de cette façon. Les nombres apparaissent plusieurs fois sous différentes formes, ainsi 1/2, 2/4, 3/6 représentent le même nombre rationnel. En ne conservant que la forme la plus simple de chacun des nombres du tableau, on peut alors associer un nombre naturel et un seul à chacun des nombres rationnels en suivant le sens des flèches. En procédant ainsi, on est certain que chaque nombre rationnel est associé à un nombre naturel et un seul. La correspondance est donc une bijection et l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable.

Diagonale de Cantor

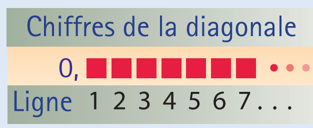
Pour montrer qu'un ensemble est dénombrable, il suffit de définir une bijection entre cet ensemble et l'ensemble des nombres naturels. Mais pour montrer qu'un ensemble est non dénombrable, il faut montrer qu'il est impossible de définir une telle bijection. Il faut procéder par l'absurde. C'est ce que Cantor a fait pour montrer que l'ensemble des nombres réels de l'intervalle]0; 1[n'est pas dénombrable. La preuve consiste à supposer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble des nombres réels de l'intervalle]0; 1[et montrer que cela entraîne une contradiction.

Supposons donc que l'on peut dénombrer les nombres réels de l'intervalle]0; 1[et exprimons-les sous forme de suites décimales illimitées. Par exemple, 1/3 s'écrit 0,3333..., 4/9 s'écrit 0,4444..., ainsi de suite. On peut alors écrire ces nombres en associant à chacun d'eux un nombre naturel.



Dans le tableau à droite, chacun des carrés représente un chiffre du nombre exprimé en suite décimale illimitée. Chaque nombre de l'intervalle]0; 1[est alors associé à un nombre naturel par la bijection dont nous avons supposé l'existence par hypothèse. Si on peut montrer qu'il existe au moins un nombre de l'intervalle]0; 1[qui n'apparaît pas dans la liste ci-haut, on aura démontré que la correspondance n'est pas une bijection et que l'ensemble des nombres de l'intervalle]0; 1[n'est pas dénombrable. La démonstration de Cantor consiste à construire un nombre différent de tous ceux apparaissant dans le tableau. Ce nombre est formé à partir de la diagonale du tableau.

Considérons le nombre formé par les chiffres sur la diagonale. Celui-ci a un développement décimal illimité.

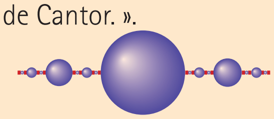


Changeons le premier chiffre de ce nombre. S'il est différent de 5, on le change pour un 5 et s'il est égal à 5, on le change pour un 2. On obtient alors un nombre différent de celui de la ligne 1. Changeons maintenant le deuxième chiffre en appliquant la même procédure. On obtient un nombre différent de celui de la première ligne et de celui de la deuxième ligne du tableau. En poursuivant ainsi, on obtient un nombre différent de chacun des nombres du tableau de correspondance. Par conséquent il n'est associé à aucun nombre naturel. Ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 est dénombrable. Il faut conclure que la correspondance n'est pas une bijection et que l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 n'est pas dénombrable.

De plus, puisque l'intervalle]0; 1[est un sous-ensemble propre de l'ensemble des nombres réels on peut conclure que l'ensemble $\mathbb{R}$ est un infini non dénombrable.

Variations sur l'ensemble de Cantor

Il y a plusieurs variantes de l'ensemble de Cantor. Ainsi, en substituant à chaque segment retranché une sphère de diamètre égal au segment, on obtient le « collier de Cantor. ».



On peut également considérer un triangle équilatéral, un carré, ou tout autre polygone régulier de côté unitaire, diviser chaque côté en trois parties égales, relier les points de division et enlever les parties centrales. Les figures ci-dessous illustrent le résultat après avoir appliqué la procédure trois fois à un triangle équilatéral et à un pentagone régulier convexe.. En poursuivant le processus à l'infini, chacune des « poussières » contient l'image du tout.