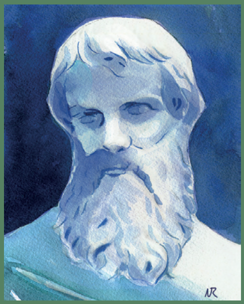


Illustration : Noémie Ross

Euclide
vers ~325 à ~265

Euclide a compilé les travaux de ses prédécesseurs et les a organisés en enchaînements de propositions déduites les unes des autres, en procédant du plus simple au plus complexe dans un ouvrage appelé *Les Éléments*. Cet ouvrage a été considéré pendant des siècles comme modèle de la construction logique de la connaissance tant scientifique que philosophique.

Euclide

Euclide est un mathématicien grec qui vécut vers ~300. Il est connu surtout par ses ouvrages, car on connaît peu de détails de sa vie. La principale source est un extrait de l'historien et philosophe grec Proclus (412-485) dont voici une traduction à partir de *Euclid's Elements*, par Sir Thomas L. Heath.

Pas beaucoup plus jeune qu'Hermotimus de Colophon et Philippus de Medma, on retrouve Euclide qui produisit les Éléments, regroupant plusieurs des théorèmes d'Eudoxe, perfectionnant plusieurs de ceux de Théétète et donnant des démonstrations irréprochables de choses qui avaient fait l'objet de présentations négligées de la part de ses prédécesseurs. Il vécut à l'époque du premier Ptolémée car Archimède qui vint immédiatement après le premier Ptolémée fait mention d'Euclide et, de plus, on raconte que le premier Ptolémée lui demanda s'il n'y avait pas une manière plus directe de s'instruire en géométrie que d'étudier les Éléments. Ce à quoi il répondit : qu'il n'y a pas de voie royale en géométrie. Il est donc plus jeune que les disciples de Platon mais plus âgé qu'Ératosthène et Archimède qui étaient contemporains.

Le mathématicien Pappus d'Alexandrie, (fin du III^{e} siècle) qui est l'auteur de la *Collection mathématique*, fait également allusion à Euclide.

L'influence de Platon qui est manifeste dans l'œuvre d'Euclide permet de supposer qu'il vécut après ou à l'époque de Platon. On sait également qu'il s'est installé à Alexandrie où il a fondé l'École de mathématiques de l'Université d'Alexandrie. De tous les géomètres de l'Antiquité, c'est lui qui a eu le plus d'influence.

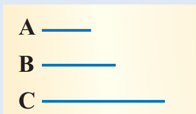
Euclide est l'auteur d'une dizaine d'ouvrages dont le plus connu *Éléments* est divisé en treize livres dont les quatre premiers portent sur la géométrie plane (points, droites, cercles, parallélogrammes, etc). Les livres V et VI portent sur la théorie des proportions et ses applications. Les livres VII à IX traitent d'arithmétique et de théorie des nombres entiers. Le livre X traite des nombres irrationnels et les trois derniers de la géométrie des solides ainsi que des cinq corps réguliers de Platon (tétraèdre, hexaèdre, octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre).

L'apport principal d'Euclide est la ***méthode axiomatique***, soit la construction d'un ensemble de propositions mathématiques obtenues à partir d'un nombre fini de postulats à l'aide de raisonnements logiques rigoureux.

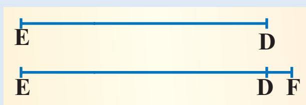
Éléments, Livre IX, proposition 20

Les nombres premiers sont en plus grand nombre que tout nombre prédéterminé.

Euclide démontre cette proposition de la façon suivante :
Soit A, B et C, ces nombres premiers et soit ED, le plus petit nombre mesuré[1] par A, B et C.



Ajoutons l'unité DF à ED. Il y a alors deux possibilités, EF est premier ou EF a un facteur premier.



Supposons d'abord que EF est premier. Alors, A, B, C et EF sont des nombres premiers et il y a plus de nombres premiers que le nombre prédéterminé.
Supposons maintenant que EF n'est pas premier. Il est alors mesuré par un nombre premier G.

Supposons que ce nombre premier est égal à l'un des nombres A, B et C. Puisque A, B et C mesurent ED, il doit en être de même pour G. Cependant, G mesure EF il doit donc mesurer DF. Ce qui est absurde.
Par conséquent, G est différent des nombres A, B et C et il est premier. Les nombres A, B, C et G étant premiers, il y a plus de nombres premiers que le nombre prédéterminé.

Critique de la démonstration

On remarque que des segments de droite servent de support au raisonnement.
On remarque également que, dans cette démonstration, les nombres premiers prédéterminés sont peu nombreux, Euclide considère seulement trois nombres premiers A, B et C. On conçoit facilement cependant que le raisonnement peut être répété avec un nombre fini quelconque de nombres premiers.
Dans une démarche moderne, il faut considérer un nombre r de nombres premiers et utiliser des points de suspension pour traduire cette généralité. On aurait alors :

Supposons qu'il existe exactement r nombres premiers distincts :

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$$

Soit N le produit de ces nombres,

$$N = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_r$$

Si N est premier alors il existe plus de r nombres premiers.
Si N n'est pas premier alors N est décomposable en produit de nombres premiers. Cependant $N + 1$ n'est pas divisible par aucun des nombres premiers

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$$

car chacun de ces nombres divise N, il devrait alors diviser 1, ce qui est impossible.
Donc, il existe au moins un nombre premier qui ne fait pas partie de la suite donnée[2].

L'argumentation utilisée par Euclide est en fait un raisonnement par récurrence dont les principes fondamentaux ont été explicités par Blaise Pascal.
Il est à noter qu'Euclide ne dit pas qu'il y a une infinité de nombres premiers car les paradoxes de Zénon ont montré qu'il est hasardeux d'utiliser l'infini dans un raisonnement. Il dit plutôt qu'ils sont en plus grand nombre que tout nombre prédéterminé. Pour nous, le résultat est le même si le nombre de nombres premiers est plus grand que tout nombre prédéterminé, il est infini.

Quelques exemples
$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$ qui est premier
$2 \times 5 \times 7 + 1 = 71$ qui est premier
$3 \times 5 \times 7 + 1 = 106 = 2 \times 53$
et 53 est premier.

1. Le plus petit nombre mesuré par A, B et C est le produit de ces trois nombres. Au sens euclidien, un nombre en mesure un autre s'il peut être reproduit un nombre entier de fois dans l'autre.
2. Le résultat selon lequel tout nombre possède un facteur premier est prouvé dans les propositions 31 et 32 du livre VII des Éléments et découle aujourd'hui directement du théorème fondamental de l'arithmétique.