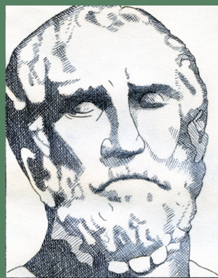


Illustration : Alain Ross

Zénon
vers –495

Zénon a énoncé plusieurs paradoxes dont quatre portent sur le problème de la relation entre le discret et le continu. Ces paradoxes nous sont connus par les écrits d'Aristote, qui cite Zénon pour en faire la critique mais également pour étoffer ses propos sur l'infini.

Zénon d'Élée
La dichotomie

Le philosophe grec Zénon est né à Élée, une ville du sud de l'Italie, entre 495 et 480 avant notre ère. Comme son maître Parménide, il fut probablement pythagoricien avant que Parménide fonde l'École d'Élée.

Zénon a énoncé divers paradoxes pour montrer l'inconsistance des enseignements des autres écoles. Quatre de ces paradoxes portent sur les enseignements de Pythagore et d'Anaxagore. Pour Pythagore, le temps et l'espace sont constitués de parties indivisibles. Anaxagore rejetait cette représentation de l'espace et du temps en parties indivisibles. Il professait la divisibilité infinie de la matière, de l'espace et du temps.

Les paradoxes de Zénon portent sur ces deux représentations du temps et de l'espace. À l'aide de quatre paradoxes : la dichotomie, Achille et la tortue, la flèche, le stade, Zénon cherche à montrer qu'aucune de ces conceptions de l'univers n'est conforme à la réalité.

La dichotomie

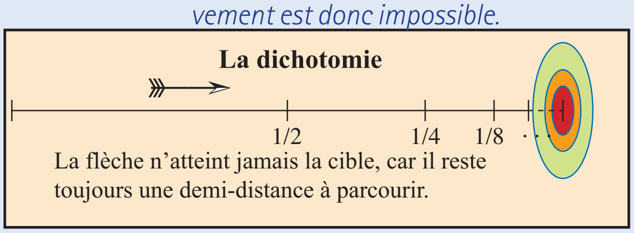
Le paradoxe de la dichotomie est formulé de la façon suivante :

Si un segment de droite est infiniment divisible, alors le mouvement est impossible, car pour parcourir ce segment, il faut d'abord en atteindre le point milieu. Mais, avant d'en atteindre le point milieu, il faut d'abord parcourir le quart de la distance. Avant de parcourir le quart de la distance, il faut en parcourir le huitième et ainsi de suite à l'infini. Il s'ensuit que le mouvement ne peut jamais commencer.

En d'autres mots, si on accepte l'hypothèse de la divisibilité infinie, une longueur finie contient un nombre infini de parties. Pour que le mouvement soit possible, c'est-à-dire pour aller d'un point à un autre, il faudrait parcourir un nombre infini de segments en un temps fini. Le mouvement est donc impossible.

Plusieurs formulations du paradoxe ont été données pour en faire la critique en utilisant des notions mathématiques plus modernes. C'est le cas de la formulation suivante :

Achille lance un javelot vers une cible. Pour atteindre la cible, le javelot doit d'abord parcourir la moitié de la distance, puis la moitié de la distance restante, et encore la moitié de la distance restante, ainsi de suite. Puisque la longueur est infiniment divisible, il reste toujours une moitié de distance à parcourir et le javelot n'atteint jamais la cible. Le mouvement est donc impossible.



Dans la formulation de ce paradoxe, Zénon considère que le temps est constitué d'instants indivisibles alors que la longueur est infiniment divisible.

En ayant recours à la géométrie analytique moderne, si le temps est indivisible, la distance qui reste à parcourir pour atteindre la cible forme une courbe asymptotique à l'axe du temps (graphique en haut à droite).

Aristote, qui cite ce paradoxe dans sa *Physique*, explique que dans un temps fini, il est possible de venir en contact avec une chose infiniment divisible car le temps est alors infiniment divisible lui aussi. En d'autres mots, si on considère que la longueur est infiniment divisible, le temps l'est également. En considérant que le temps aussi est infiniment divisible le graphique devient une droite qui coupe l'axe du temps et la flèche atteint la cible (deuxième graphique à droite). Dans un temps fini, il est possible de parcourir une distance finie.

Dans cette deuxième formulation on constate assez facilement que le paradoxe se fonde sur la conviction intuitive que la somme d'un nombre infini de grandeurs positives donne toujours l'infini. En réalité, cela dépend des termes que l'on additionne. En additionnant un nombre infini de termes, on peut obtenir une somme finie.

Illustrons ce fait en considérant un carré d'aire unitaire et subdivisons-le en quatre carrés. Colorions le carré supérieur gauche et le carré inférieur droit. Subdivisons à nouveau en quatre les carrés de couleur pâle et colorions de la même façon. La figure en bas de page donne les premières étapes de la coloration.

On ne peut certes prétendre qu'en poursuivant ce processus on réussira à colorier une aire infinie. Même si le nombre d'étapes est infini, l'aire totale qu'on peut espérer colorier est celle du carré.

La somme des aires des parties coloriées est donnée par :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^i}+\ldots$$

Pour alléger l'écriture, on représente la somme des n premiers termes par :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}.$$

La somme infinie est décrite par :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}=1.$$

Dans cette notation, le signe d'égalité a un sens différent de celui que l'on rencontre dans les équations. Cette expression signifie qu'en poursuivant le processus, la limite est la somme. C'est-à-dire plus n s'approche de ∞ plus la somme s'approche de 1. Dans la formulation du paradoxe de la dichotomie, Zénon fixe l'attention sur le nombre infini d'étapes de la partie gauche de l'expression précédente et comme c'est un processus sans fin, la partie droite, pour lui, ne peut exister. Puisque l'addition comporte un nombre infini de termes, il conclut que c'est un processus sans fin et que le mouvement est impossible. Dans le traitement moderne, on se libère du nombre infini d'étapes en déterminant la limite du processus.