Evangelista Torricelli
1608–1647

Vers 1641, Torricelli porte son attention sur un solide qu'il nomme *solide hyperbolique aigu***. Il montre en utilisant la méthode des indivisibles que ce solide, qu'on appelle maintenant** *Trompette de Gabriel* **a un volume fini identique à celui d'un cylindre.**

Evangelista Torricelli
Trompette de Gabriel

Torricelli connaissait bien les travaux d'Archimède, de Galilée et de Cavalieri. Il semblait insatisfait des preuves obtenues par la méthode de Cavalieri, qui se préoccupait peu de la rigueur mathématique et des difficultés logiques soulevées par les indivisibles. Il développe des preuves par double contradiction comme le faisait Archimède, en complément aux conjectures obtenues par les indivisibles de Cavalieri.

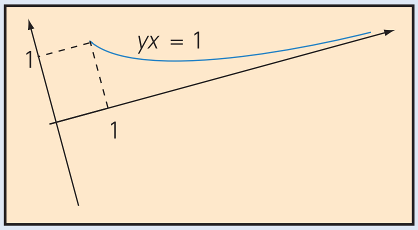
Torricelli a déterminé la longueur de l'arc d'une cycloïde, a déterminé, dans le plan d'un triangle, le point dont la somme des distances aux sommets est minimum et il a étudié le mouvement des projectiles. Dans la partie intitulée *De infinitis hyperbolis* de son ouvrage, il présente, sous forme géométrique, un résultat équivalent à l'intégrale définie :

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

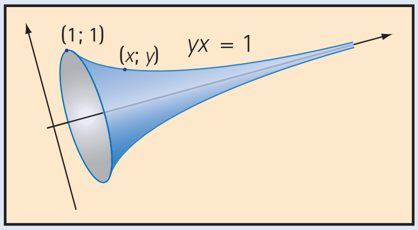
pour toutes les valeurs rationnelles, sauf $n = -1$.

Trompette de Gabriel

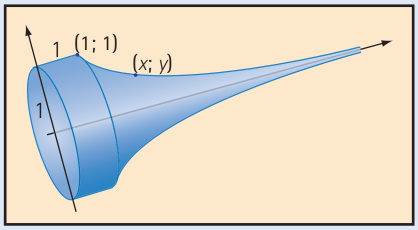
En 1641, il porte son attention sur le solide engendré par la rotation d'un segment d'une branche d'hyperbole autour de son asymptote. Pour faciliter la compréhension de sa démarche, considérons l'hyperbole d'équation $xy = 1$ dans l'intervalle de 1 à l'infini et utilisons la géométrie analytique moderne pour illustrer son raisonnement.



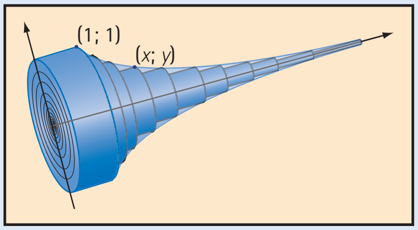
La révolution de cette courbe autour de l'axe des x donne la figure suivante, appellée *Trompette de Gabriel,* car elle met en relation le divin et l'infini



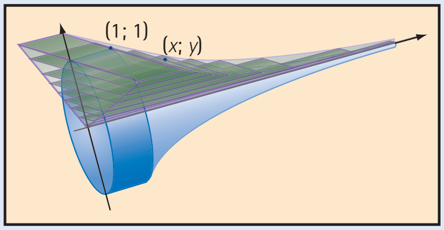
Pour procéder à sa démonstration, Torricelli pose un bouchon à la trompette, soit un cylindre de rayon 1 et de hauteur 1.



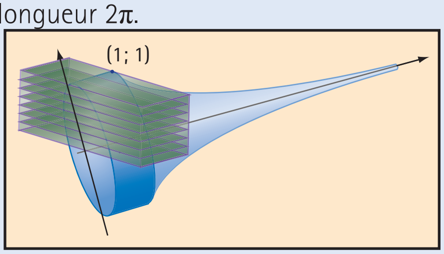
Les indivisibles utilisés par Torricelli sont des tubes concentriques.



Il déroule les tubes et obtient des parallélépipèdes rectangles infiniment minces. Chaque rectangle a pour dimension $x \times 2\pi y$ et, puisque $xy = 1$, tous les parallélépipèdes ont une aire de 2π.

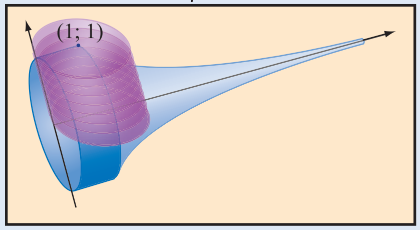


Le volume ocupé par ces rectangles est le même qu'un unique parallélépipède rectangle de largeur 1, de hauteur 1 et de longueur 2π.



Chacun des indivisibles de ce parallépipède est un rectangle d'aire 2π, c'est-à-dire que chaque rectangle a la même aire qu'un disque de rayon unitaire.

Par conséquent, le volume de la trompette avec bouchon est égal au volume du cylindre dont l'aire de la base est 2π et la hauteur est 1, soit 2π.

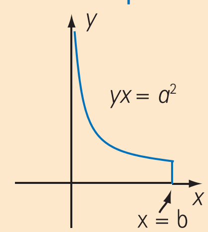


Le bouchon posé par Torricelli étant un cylindre de rayon 1 et de hauteur 1, son volume est donc égal à π. En soustrayant ce volume de celui du solide avec bouchon on obtient que le volume de la trompette seule est égal à π. Après avoir établi cette conjecture, Torricelli en fait une démonstration par un double raisonnement par exhaustion.

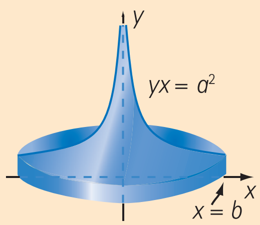
Qu'un solide de longueur infinie puisse posséder un volume fini semble contre-intuitif aux mathématiciens de l'époque et suscite de nombreuses discussions sur le sujet du fini et de l'infini.

À l'aide du calcul intégral, on obtient un autre paradoxe : l'aire de la surface de la trompette est infinie alors que son volume est fini. On pourrait donc remplir la trompette avec une quantité finie de peinture, mais pour en peindre la surface, il en faudrait une quantité infinie.

Courbe plane



Solide de révolution



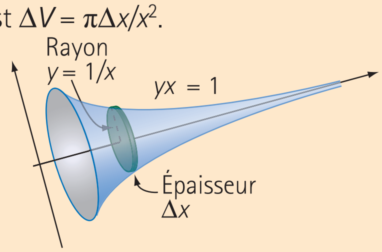
On procède de façon analogue pour un solide obtenu par révolution autour de l'axe vertical.

Trompette de Gabriel

Ce nom associe l'infini au divin, car selon la tradition chrétienne l'archange Gabriel doit annoncer le Jour du jugement dernier en soufflant dans une trompette.

Calcul moderne

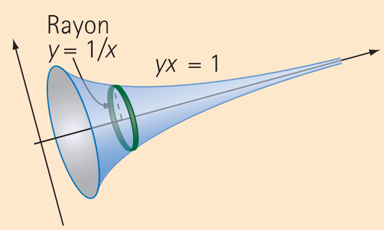
Par la méthode moderne des disques, le volume d'un disque est $\Delta V = \pi \Delta x / x^2$.



Le volume de la trompette est alors

$$V = \int_1^\infty \frac{\pi}{x^2} dx = \pi \lim_{c \to \infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \pi \lim_{c \to \infty} \int_1^c x^{-2} dx = \pi \lim_{c \to \infty} \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) \Bigg]_1^c = \pi$$



Pour en calculer la surface, l'intégrale à effectuer est

$$A = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} dx$$

Pour effectuer cette intégrale impropre, il faut procéder à un changement de variable trigonométrique et on obtient que l'aire de la surface est infinie.