9

INTÉGRALE DÉFINIE

Analyser des situations nécessitant le calcul de l'aire sous une courbe en utilisant une somme de Riemann.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la détermination de la somme de Riemann pour estimer l'aire sous une courbe;
- l'utilisation du symbole de sommation et de ses propriétés;
- l'utilisation des formules de la somme des puissances des *n* premiers entiers;
- le calcul de l'aire sous une courbe simple comme valeur limite d'une somme de Riemann;
- l'utilisation de l'intégrale définie dans l'analyse de divers phénomènes.

OBJECTIFS

9.1 Déterminer l'aire sous une courbe en évaluant la limite d'une somme de Riemann.

9.2 Appliquer l'intégrale définie et ses propriétés dans des situations diverses.

9.1 L'aire, limite d'une somme

L'aire sous une courbe peut être estimée en décomposant l'aire délimitée par cette courbe en rectangles et en faisant la somme des aires de ceux-ci.

Sommations

Pour alléger l'écriture des sommes d'aires de rectangles, nous définissons la notion de sommation et présentons quelques-unes de ses propriétés.

Sommation01

REMARQUE
Dans les situations présentées dans ce chapitre, la borne inférieure de l'indice de sommation sera 1.

Sommation

On appelle **sommation** une expression de la forme $\sum_{i=r}^{n} a_i$, où le symbole Σ (lettre grecque sigma) est appelé **symbole de sommation**. Le terme a_i est le **terme général** de la sommation. L'indice i, appelé **indice de sommation**, prend toutes les valeurs entières de la **borne inférieure** r à la **borne supérieure** n. On a donc :

$$\sum_{i=r}^{n} a_i = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

La **portée** d'un symbole de sommation est l'expression algébrique qui est affectée par le symbole de sommation.

REMARQUE
Le symbole Σ pour désigner la première lettre de **summa** qui signifie somme en latin a été introduit par Leonhard Euler dans **Institutiones calculi differentialis** publié à Saint-Péterbourg en 1755.

Lorsque le symbole de sommation est suivi d'une expression algébrique constituée du produit ou du quotient d'expressions algébriques plus simples, toute cette expression est dans la portée du symbole de sommation.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a} \text{ représente le développement } \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a} + \ldots + \frac{x_n}{a}.$$

Cependant, lorsque l'expression algébrique qui suit le symbole de sommation est constituée de sommes ou de différences d'expressions algébriques plus simples, il faut préciser la portée du symbole à l'aide de parenthèses lorsqu'elle s'étend au-delà du premier terme de cette somme ou de cette différence.

Ainsi, dans l'expression $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$, le symbole de sommation n'affecte que le terme $a_i x_i$. On a donc :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b.$$

Dans l'expression $\sum_{i=1}^{n} (a_i x_i + b)$, la portée du symbole est $a_i x_i + b$,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x_i + b) = (a_1 x_1 + b) + (a_2 x_2 + b) + \ldots + (a_n x_n + b).$$

EXEMPLE 9.1.1

Écrire le développement des expressions suivantes et effectuer la somme :

a) $\sum_{k=3}^{7} k^2$

b) $\sum_{j=1}^{5} (3j-2)$

c) $\sum_{k=1}^{5} 2k+x$

d) $\sum_{i=0}^{6} (-1)^i \frac{(i+1)^2}{3}$

■ *Solution*

a) $\sum_{k=3}^{7} k^2 = 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2=135.$

b) $\sum_{i=1}^{5} (3j-2)=1+4+7+10+13=35.$

c) $\sum_{k=1}^{5} 2k+x=2+4+6+8+10+x=30+x.$

d) $$\sum_{i=0}^{6} (-1)^i \frac{(i+1)^2}{3} = \frac{1^2}{3}-\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{3}-\frac{4^2}{3}+\frac{5^2}{3}-\frac{6^2}{3}+\frac{7^2}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2\right)=\frac{28}{3}.$$

PROPRIÉTÉS

Symbole de sommation

1. $\sum_{i=1}^{n} a = na$
2. $\sum_{i=1}^{n} ax_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$
4. $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{k=1}^{n} x_k = \ldots$

Sommation02

REMARQUE

On démontre ces propriétés en développant les sommes. La plupart des démonstrations est laissée en exercices.

EXEMPLE 9.1.2

Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i.$

■ *Solution*

Par la définition du symbole de sommation, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i) = (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_n+y_n).$$

En regroupant les termes par commutativité et associativité,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = (x_1 + x_2 + ... + x_n) + (y_1 + y_2 + ... + y_n).$$

Par la définition du symbole de sommation, on peut alors représenter les deux sommes de façon compacte et on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = (x_1 + x_2 + ... + x_n) + (y_1 + y_2 + ... + y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

On conclut que : $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i.$

Les formules des sommes de puissances d'entiers permettent de calculer la valeur de certaines sommes sans avoir à les développer.

La démonstration de ces propriétés fait l'objet de la vidéo Sommation03

À l'aide de représentatioss géométriques des nombres, Pythagore obtenait certains des résultats ci-contre.

SOMMES

Puissances d'entiers

Les sommes des puissances des n premiers entiers positifs sont données par les expressions suivantes :

$$1+2+3+...+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Illustrons l'utilisation qui en est faite dans l'évaluation de l'aire sous une courbe.

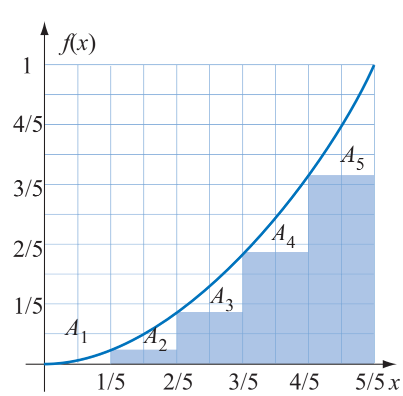
EXEMPLE 9.1.3

IntegDef01

Décomposer l'aire sous la courbe définie par $f(x) = x^2$ dans l'intervalle [0; 1] en 5 rectangles de même base. Estimer l'aire sous la courbe à l'aide de ces rectangles.

a) Prendre l'image par la fonction de la frontière de gauche des sous-intervalles comme hauteurs des rectangles.

b) Prendre l'image par la fonction de la frontière de droite des sous-intervalles comme hauteurs des rectangles.



■ *Solution*

a) La figure ci-contre représente une décomposition de l'aire sous la courbe en cinq rectangles de même base. On peut estimer l'aire sous la courbe en faisant la somme des aires de ces rectangles. La base des rectangles est 1/5 et la hauteur d'un rectangle est l'image par la fonction de la frontière de gauche du sous-intervalle. Ainsi, la hauteur du premier rectangle est $f(0) = (0)^2$. L'aire A_1 du premier rectangle est donc :

$$A_1 = \frac{1}{5} \times f(0) = \frac{1}{5} \times (0)^2.$$

La hauteur du second rectangle est $f(1/5) = (1/5)^2$. L'aire A_2 du deuxième rectangle est :

$$A_2 = \frac{1}{5} \times f(1/5) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2.$$

La somme A_t des aires des cinq rectangles est :

$$A_t = \frac{1}{5} \times (0)^2 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2.$$

Par mise en évidence,

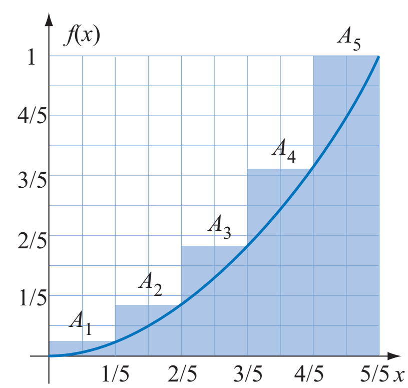
$$A_t = \frac{1}{5^3} \times \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right).$$

En utilisant la forme fermée de la sommation,

$$A_t = \frac{1}{5^3} \times \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right) = \frac{1}{5^3} \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6} = \frac{30}{5^3} = \frac{6}{25}.$$

C'est une estimation par manque de l'aire sous la courbe.

b) La base des rectangles est 1/5 et la hauteur d'un rectangle est l'image par la fonction de la frontière de droite du sous-intervalle. Ainsi, la hauteur du premier rectangle est $f(1/5) = (1/5)^2$. L'aire A_1 du premier rectangle est donc :



$$A_1 = \frac{1}{5} \times f(1/5) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2.$$

La hauteur du second rectangle est $f(2/5) = (2/5)^2$. L'aire A_2 du deuxième rectangle est :

$$A_2 = \frac{1}{5} \times f(2/5) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2.$$

La somme A_t des aires des cinq rectangles est alors :

$$A_t = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{5}{5}\right)^2.$$

Par mise en évidence, on obtient alors :

$$A_t = \frac{1}{5^3} \times \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\right).$$

En utilisant la forme fermée de la sommation,

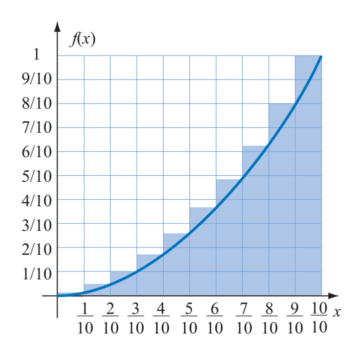
$$A_t = \frac{1}{5^3} \times \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\right) = \frac{1}{5^3} \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = \frac{11}{25}.$$

C'est une estimation par excès de l'aire sous la courbe.

REMARQUE

En augmentant le nombre de subdivisions, on augmente la précision de l'estimation.

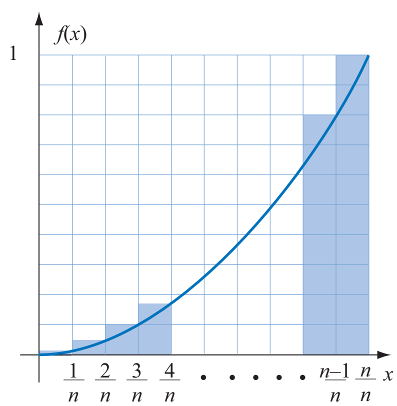
L'aire sous la courbe est donc comprise entre 6/25 = 0,24 et 11/25 = 0,44. On peut améliorer les estimations en subdivisant l'intervalle [0; 1] en 10 sous-intervalles, on obtient alors que l'aire sous la courbe est comprise entre 0,285 et 0,385.



On peut déterminer l'aire exacte en considérant n subdivisions de l'intervalle et en déterminant la limite lorsque n tend vers l'infini. La procédure à appliquer est la suivante.

REMARQUE
Lorsqu'on divise un intervalle en sous-intervalles, on dit que l'on fait une **partition de l'intervalle.**

IntegDef02



REMARQUE
Puisque les rectangles ont même base, on peut simplement faire le produit de la base par la somme des hauteurs.
Lorsque l'intervalle est divisé en sous-intervalles de même largeur, on dit que la partition est **régulière**.

REMARQUE
Il y a une différence de comportement entre la variable n qui représente un entier positif et la variable x qui représente un nombre réel. L'une est discrète et l'autre est continue. Pour le moment, nous avons simplement besoin de savoir que les mêmes techniques s'appliquent pour évaluer la limite.

PROCÉDURE

Évaluation de l'aire comme limite d'une somme

1. Déterminer une expression donnant la somme des aires des rectangles en subdivisant l'intervalle en n sous-intervalles.
2. Effectuer les mises en évidence et les regroupements des entiers de même puissance.
3. Utiliser les expressions donnant la somme des n premières puissances des entiers.
4. Évaluer la limite à l'infini de l'expression obtenue.

EXEMPLE 9.1.4

Déterminer l'aire sous la courbe définie par $f(x) = x^2$ dans l'intervalle [0; 1] en évaluant la limite de la somme des aires de rectangles lorsque leur nombre tend vers l'infini.

Solution

Partition de l'intervalle

Considérons que l'intervalle [0; 1] est divisé en n sous-intervalles :
$[0; 1/n]$, $[1/n; 2/n]$, $[2/n; 3/n]$, ..., $[(n–1)/n; n/n]$
La somme des aires des rectangles est alors :

$$A_t = \frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\times\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\times\left(\frac{n}{n}\right)^2.$$

Regroupements et factorisation

$$A_t = \frac{1}{n}\times\left(\frac{1^2}{n^2}\right) + \frac{1}{n}\times\left(\frac{2^2}{n^2}\right) + \frac{1}{n}\times\left(\frac{3^2}{n^2}\right) + \ldots + \frac{1}{n}\times\left(\frac{n^2}{n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{n^3}\times(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2).$$

Somme des puissances

En substituant l'expression donnant la somme des carrés des n premiers entiers, on obtient :

$$A_t = \frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}.$$

Évaluation de la limite

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3}\times\frac{2+3/n+1/n^2}{6}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2+3/n+1/n^2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

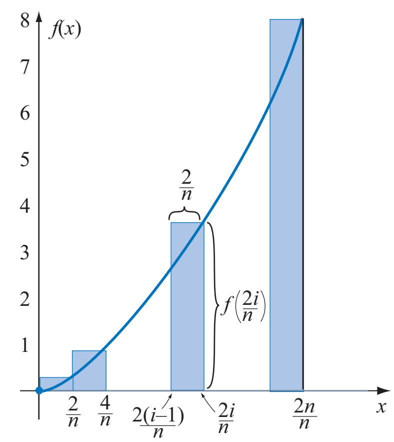
L'aire sous la courbe de $f(x) = x^2$ dans l'intervalle [0; 1] est donc égale à 1/3 d'unité d'aire.

Pour calculer l'aire sous une courbe, dans un intervalle $[c; d]$, il nous faut diviser celle-ci en sous-intervalles et faire la somme des aires des rectangles. En utilisant le symbole de sommation, il nous suffira de déterminer un représentant des termes de la somme, soit l'aire du i^e sous-intervalle. Voyons comment déterminer ce terme général de la sommation.

EXEMPLE 9.1.5

Déterminer l'aire sous la courbe définie par $f(x) = x^3$ dans l'intervalle $[0; 2]$ en évaluant la limite de la somme des aires de rectangles lorsque leur nombre tend vers l'infini.

IntegDef03



Solution

Partition de l'intervalle

Considérons que l'intervalle $[0; 2]$ est divisé en n sous-intervalles. Ceux-ci sont alors de largeur $2/n$ et cette largeur est la base des rectangles. On a alors :

$$[0; 2/n], [2/n; 4/n],..., [2(i-1)/n; 2i/n] ..., [2(n-1)/n; 2n/n].$$

En additionnant $(i-1)$ fois la largeur des sous-intervalles à partir de 0, on obtient la frontière gauche du i^e rectangle, ce qui donne $2(i-1)/n$. Celle de droite est obtenue en additionnant i fois $2/n$, qui donne $2i/n$.

Considérons l'image de la frontière de droite comme hauteur du i^e rectangle :

$$f\left(\frac{2i}{n}\right)=\left(\frac{2i}{n}\right)^3=\frac{2^3 i^3}{n^3}.$$

La largeur du rectangle est $2/n$ et son aire est :

$$A_i=\frac{2}{n}\times\frac{2^3 i^3}{n^3}=\frac{2^4 i^3}{n^4}.$$

Notons A_t, la somme des aires des rectangles. En utilisant le symbole de sommation, on obtient :

$$\begin{aligned}A_t &= \sum_{i=1}^{n}\frac{2^4 i^3}{n^4}=\frac{2^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{2^4}{n^4}\times\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)\\ &=\frac{2^4}{n^4}\times\frac{n^2(n+1)^2}{2^2}=\frac{4n^2(n+1)^2}{n^4}=\frac{4n^2(n^2+2n+1)}{n^4}.\end{aligned}$$

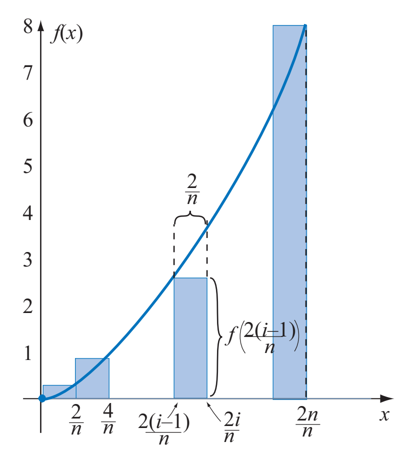
Évaluation de la limite

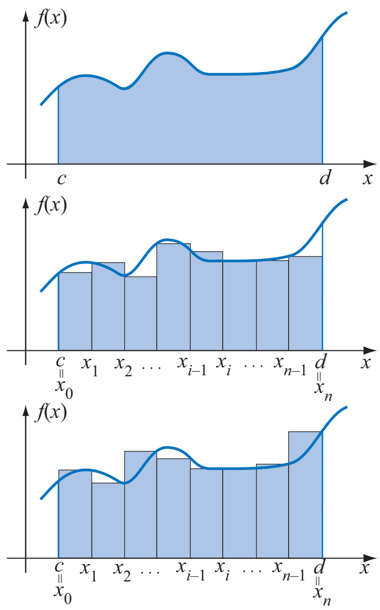
$$\begin{aligned}A &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n^2(n^2+2n+1)}{n^4}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n^4}{n^4}(1+2/n+1/n^2)\right]\\ &=\lim_{n\to\infty}\left[4(1+2/n+1/n^2)\right]=4(1+0+0)=4.\end{aligned}$$

L'aire sous la courbe de $f(x) = x^3$ dans l'intervalle $[0; 2]$ est donc égale à 4 unités d'aire.

REMARQUE

Dans l'exemple 9.1.5, on peut procéder en considérant la frontière de gauche comme hauteur du rectangle pour déterminer le terme général dans la sommation. Le terme est différent, un peu plus compliqué, mais la limite est la même.





IntegDef04

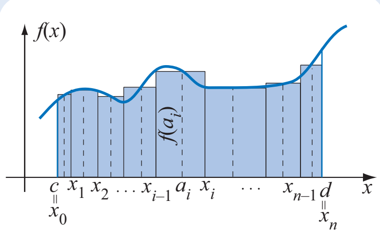
Intégrale définie

Dans l'exemple précédent, nous avons déterminé l'aire d'une surface délimitée par la courbe d'une fonction positive et croissante dans un petit intervalle. Pour y parvenir, nous avons divisé la surface en rectangles de même largeur et effectué la somme des aires de ceux-ci en choisissant comme hauteur d'un rectangle l'image par la fonction de sa frontière de droite. Puis, en considérant la limite lorsque la largeur des rectangles tend vers 0, nous avons obtenu l'aire de la surface.

Portons maintenant notre attention sur une courbe quelconque représentant une fonction continue qui n'est pas toujours croissante et considérons l'aire sous celle-ci dans un intervalle quelconque $[c; d]$.

Pour calculer une valeur approchée de cette aire, on peut déterminer une partition de l'intervalle. Cette partition est dite **régulière** si les sous-intervalles ont même largeur. Elle est dite **irrégulière** dans le cas contraire.

On peut alors former des rectangles en choisissant comme hauteur d'un rectangle soit l'image par la fonction de sa frontière de gauche, soit l'image de sa frontière de droite ou encore l'image d'une valeur quelconque du sous-intervalle. La somme des aires de ces rectangles est alors une valeur estimée de l'aire sous la courbe.



Somme de Riemann

Soit f, une fonction définie sur $[c; d]$ et $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ une partition de cet intervalle, où $x_0 = c$ et $x_n = d$. On appelle **somme de Riemann** toute somme de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i, \text{ où } a_i \in [x_{i-1}; x_i[\subset [c;d] \text{ et } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

REMARQUE
Dans cette définition, l'expression :
$a_i \in [x_{i-1}; x_i[$
signifie que $a_1 \in [x_0; x_1[$, $a_2 \in [x_1; x_2[$, ainsi de suite.

En utilisant une somme de Riemann, on peut calculer une valeur approchée de l'aire sous la courbe d'une fonction positive. De plus, on obtient la grandeur réelle de cette aire en évaluant la limite lorsque la largeur du plus grand des sous-intervalles tend vers 0, soit :

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[f(a_1)\Delta x_1 + f(a_2)\Delta x_2 + ... + f(a_n)\Delta x_n \right].$$

REMARQUE
Dans l'exemple 9.1.5, nous avions choisi une partition régulière pour laquelle $\Delta x = 2/n$. On avait alors :
$\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = (b - a)/n.$

Nous avons vu au chapitre précédent que l'aire sous la courbe peut représenter diverses grandeurs physiques. C'est pourquoi nous allons donner une définition de cette aire que nous appellerons **intégrale définie**. Elle est obtenue par la limite d'une somme de Riemann.

Intégrale définie

Soit f, une fonction définie sur $[c; d]$ et $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, une partition de cet intervalle. L'**intégrale définie** de la fonction f sur l'intervalle $[c; d]$, notée $\int_c^d f(x)dx$ est définie de la façon suivante :

$$\int_c^d f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i, \text{ où } a_i \in [x_{i-1}; x_i[\subset [c;d],$$

lorsque cette limite existe. Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction est **intégrable** sur l'intervalle $[c; d]$.

Dans la notation $\int_c^d f(x)dx$, c est appelée la **borne inférieure** et d la **borne supérieure de l'intégration**. La fonction $f(x)$ est appelée l'**intégrande**.

REMARQUE

Si la fonction f est positive sur l'intervalle $[c; d]$, l'intégrale définie représente l'aire sous la courbe sur cet intervalle.

Nous sommes maintenant en mesure de décrire la procédure pour calculer l'intégrale définie comme limite d'une somme de Riemann.

PROCÉDURE

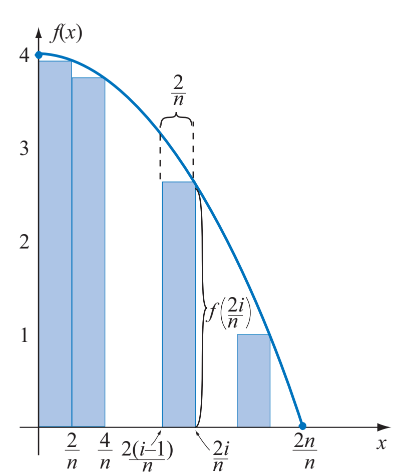
Aire sous une courbe à l'aide d'une somme de Riemann

1. Déterminer la largeur Δx des sous-intervalles, $\Delta x = (d–c)/n$.
2. Déterminer la frontière droite du i^e sous-intervalle et calculer son image par la fonction (cette image est la hauteur du rectangle).
3. Déterminer l'aire du i^e rectangle (terme général de la somme).
4. Écrire la somme de Riemann, effectuer les simplifications algébriques et écrire les sommes de puissances sous forme compacte.
5. Évaluer la limite de la somme lorsque n tend vers l'infini et interpréter le résultat selon le contexte en tenant compte des unités s'il y a lieu.

EXEMPLE 9.1.6

Calculer l'intégrale définie suivante $\int_0^2 (4 - x^2)dx$.

IntegDef05



■ ***Solution***

L'intégrale définie demandée correspond à l'aire sous la courbe de $f(x) = 4 - x^2$ sur l'intervalle $[0; 2]$ car la fonction est positive sur $[0; 2]$.

Partition de l'intervalle

En divisant l'intervalle $[0; 2]$ en n sous-intervalles, la largeur de ceux-ci sera $2/n$ et cette largeur est la base des rectangles.

Frontière de droite du i^e sous-intervalle

En additionnant i fois la largeur des sous-intervalles à partir de 0, on obtient la frontière droite du i^e rectangle, soit $2i/n$.

REMARQUE
Dans l'exemple 9.1.6, nous avons considéré la frontière de droite pour évaluer les différentielles et établir la somme de Riemann. Le résultat eut été le même en considérant les frontières de gauche car la limite de cette somme eut été la même.

TIC
```
>restart;
 with(plots):with(student):
 f:=x->4-x^2;
 c:=0;d:=2;n:=20;
 g1:=plot(f(x),x=c..d,y=f(c)..f(d)):
 g2:=plot(f(x),x=c..d,filled=true,
 color=green):
 display(g1,g2);
 rightbox(f(x),x=c..d,n);
 leftbox(f(x),x=c..d,n);
 rightsum(f(x),x=c..d,n)
 =evalf(rightsum(f(x),x=c..d,n));
 leftsum(f(x),x=c..d,n)
 =evalf(leftsum(f(x),x=c..d,n));
```

Son image par la fonction est :

$$f\left(\frac{2i}{n}\right)=4-\left(\frac{2i}{n}\right)^2=4-\frac{2^2i^2}{n^2}.$$

Aire du i^e sous-intervalle

L'aire est le produit de la largeur du rectangle par sa hauteur, soit :

$$A=\frac{2}{n}\times\left(4-\frac{2^2i^2}{n^2}\right)=\frac{2}{n}\times\left(\frac{4n^2-4i^2}{n^2}\right)=\frac{8}{n^3}(n^2-i^2).$$

Somme de Riemann

La somme des aires des rectangles donne :

$$\begin{aligned}A_t&=\sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^3}(n^2-i^2)=\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(n^2-i^2)=\frac{8}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n}n^2-\sum_{i=1}^{n}i^2\right]\\&=\frac{8}{n^3}\left[n^3-\sum_{i=1}^{n}i^2\right]=\frac{8}{n^3}\left[n^3-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\\&=\left[8-\frac{4n(n+1)(2n+1)}{3n^3}\right].\end{aligned}$$

Évaluation de la limite

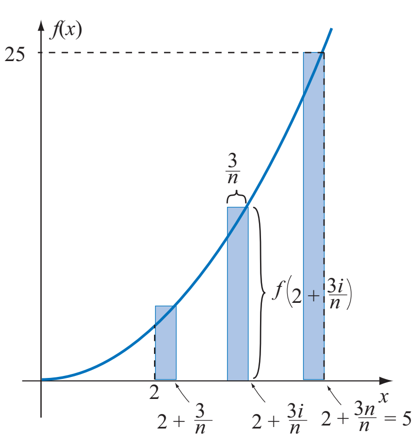
$$\begin{aligned}A&=\lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{4n(n+1)(2n+1)}{3n^3}\right)=8-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^3(1+1/n)(2+1/n)}{3n^3}\right)\\&=8-\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3}\left(\frac{4(1+1/n)(2+1/n)}{3}\right)=8-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4(1+1/n)(2+1/n)}{3}\right)\\&=8-\left(\frac{4(1+0)(2+0)}{3}\right)=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}.\end{aligned}$$

On obtient donc ;

$$\int_0^2(4-x^2)dx=\frac{16}{3}.$$

L'aire sous la courbe est donc de 16/3 d'unités d'aire.

IntegDef06



EXEMPLE 9.1.7

Calculer l'intégrale définie suivante $\int_2^5 x^2\,dx$.

■ ***Solution***

L'intégrale définie demandée correspond à l'aire sous la courbe de la fonction $f(x)=x^2$ sur l'intervalle [2; 5] puisque la fonction est positive sur cet intervalle.

Partition de l'intervalle

En divisant l'intervalle [2; 5] en n sous-intervalles, la largeur de ceux-ci sera $3/n$ et cette largeur est la base des rectangles.

Frontière de droite du i^e sous-intervalle

En additionnant i fois la largeur des sous-intervalles à partir de 2, on obtient la frontière droite du i^e rectangle, soit :

$$x_i = 2 + \frac{3i}{n} = \frac{2n+3i}{n}.$$

Son image par la fonction est :

$$f\left(\frac{2n+3i}{n}\right) = \left(\frac{2n+3i}{n}\right)^2 = \frac{4n^2+12ni+9i^2}{n^2}.$$

Aire du i^e sous-intervalle

L'aire est le produit de la largeur du rectangle par sa hauteur, soit :

$$A = \frac{3}{n} \times \frac{4n^2+12ni+9i^2}{n^2} = \frac{3}{n^3}\left(4n^2+12ni+9i^2\right).$$

Somme de Riemann

La somme des aires des rectangles donne :

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left(4n^2+12ni+9i^2\right) \\ &= \frac{3}{n^3}\left(4n^3+12n\frac{n(n+1)}{2}+9\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= \left(12+\frac{18}{n}(n+1)+\frac{9}{2n^3}n(n+1)(2n+1)\right). \end{aligned}$$

Évaluation de la limite

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty}\left(12+\frac{18}{n}(n+1)+\frac{9}{2n^3}n(n+1)(2n+1)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(12+\frac{18n}{n}(1+1/n)+\frac{9n^3}{2n^3}(1+1/n)(2+1/n)\right) = 39. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\int_2^5 x^2\,dx = 39.$$

L'aire sous la courbe est donc de 39 unités d'aire.

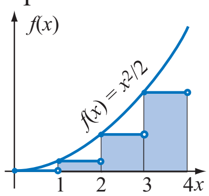
TIC

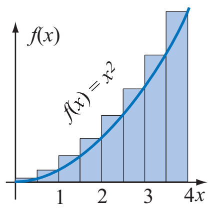
```
>restart;
 with(plots):with(student):
 f:=x->x^2;
 c:=2;d:=5;n:=20;
 g1:=plot(f(x),x=c..d,y=f(c)..f(d)):
 g2:=plot(f(x),x=c..d,filled=true,
 color=green):
 display(g1,g2);
 rightbox(f(x),x=c..d,n);
 leftbox(f(x),x=c..d,n);
 rightsum(f(x),x=c..d,n)
 =evalf(rightsum(f(x),x=c..d,n));
  leftsum(f(x),x=c..d,n)
 =evalf(leftsum(f(x),x=c..d,n));
```

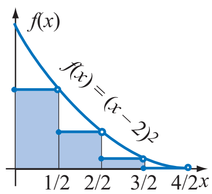
Augmenter la valeur de n dans la suite d'instructions et faire effectuer. La valeur exacte de l'intégrale est comprise entre les valeurs calculées par le logiciel en considérant les frontières de gauche et de droite comme hauteur des rectangles.

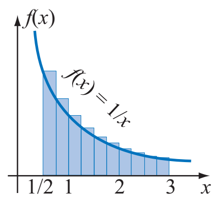
9.2 Exercices

1. Dans les situations suivantes, écrire la somme de Riemann permettant de calculer l'aire de la surface formée par les rectangles et utiliser le symbole de sommation pour écrire cette somme de façon compacte.

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Développer les sommes suivantes, puis évaluer :

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i^2$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(2i-3)$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(k^2-k)$ d) $\displaystyle\sum_{k=4}^{7}(3k^2-2k)$

e) $\displaystyle\sum_{k=4}^{7} 2$

3. Écrire les sommes suivantes en utilisant la notation sigma.

a) $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 12$

b) $3 + 6 + 9 + 12 + ... + 42$

c) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{10}$

d) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{256}$

e) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...-\frac{1}{16}$

f) $1+\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{5\pi}{8}$

g) $17 + 26 + 37 + 50 + ... + 101$

h) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+...+\frac{10}{11}$

i) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+...+\frac{12}{25}$

4. Utiliser les propriétés de commutativité, de distributivité et d'associativité de l'addition des réels pour démontrer les propriétés suivantes du symbole de sommation.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}ax_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a=na$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i+a)=\sum_{i=1}^{n}x_i+na$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a(x_i+y_i)=a\left[\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i\right]$

5. Utiliser les propriétés de la notation sigma pour écrire une forme équivalente de l'expression donnée.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3x_i^2-4)$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(5x_i^2-2y_i)$

6. Écrire les expressions suivantes en utilisant les formules donnant la somme des puissances des n premiers entiers positifs, puis évaluer la limite.

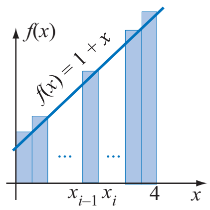
a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$ e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8}{n}-\frac{2k}{n^2}\right)$

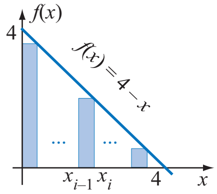
b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3k^2}{n^3}$ f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{n}-\frac{3k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3k}{n^2}$ g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{12}{n}-\frac{4k^2}{n^3}\right)$

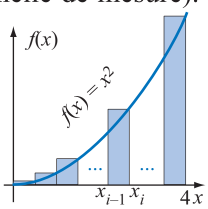
d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3k^2}{n^3}$

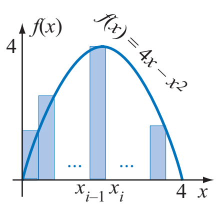
7. Dans les situations suivantes, déterminer la partition de l'intervalle en n sous-intervalles. Écrire la somme de Riemann permettant de calculer la somme des aires de ces n rectangles. Évaluer la limite de cette somme lorsque n tend vers l'infini (les deux axes n'ont pas nécessairement la même échelle de mesure). Évaluer l'aire par un procédé géométrique et comparer le résultat à la limite obtenue.

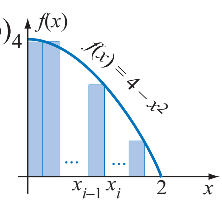
a) 

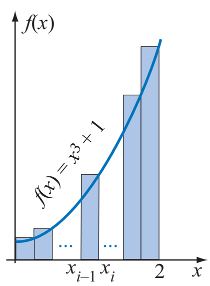
b) 

8. Dans les situations suivantes, déterminer la partition de l'intervalle en n sous-intervalles. Écrire la somme de Riemann permettant de calculer la somme des aires de ces n rectangles. Évaluer la limite de cette somme lorsque n tend vers l'infini (les deux axes n'ont pas nécessairement la même échelle de mesure).

a) 

c) 

b) 

d) 

9. Représenter graphiquement la surface et calculer l'aire représentée par les intégrales définies suivantes :

a) $\int_{-1}^{1}(4-x)\,dx$ c) $\int_{-2}^{-1}x^2\,dx$

b) $\int_{-1}^{1}x^2\,dx$ d) $\int_{-1}^{1}(3-x^2)\,dx$

Les exercices qui suivent ont pour but de construire une petite banque d'intégrales définies pour des fonctions puissances entières que nous utiliserons avec les propriétés de l'intégrale définie à la prochaine section. Pour ce faire, effectuer les intégrales demandés et généraliser pour un intervalle $[0; d]$.

10. Évaluer les intégrales suivantes en déterminant la limite d'une somme de Riemann. Confirmer le résultat par un procédé géométrique.

a) $\int_{0}^{1}1\,dx$ d) $\int_{0}^{2}x\,dx$

b) $\int_{0}^{d}1\,dx$ e) $\int_{0}^{3}x\,dx$

c) $\int_{0}^{1}x\,dx$ f) $\int_{0}^{d}x\,dx$

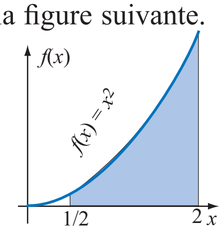
11. Évaluer les intégrales suivantes en déterminant la limite d'une somme de Riemann.

a) $\int_{0}^{1}x^2\,dx$ c) $\int_{0}^{3}x^2\,dx$

b) $\int_{0}^{2}x^2\,dx$ d) $\int_{0}^{d}x^2\,dx$

e) En supposant que le résultat de d est valide pour tout nombre rationnel, évaluer $\int_{0}^{3/2}x^2\,dx$.

f) Utiliser le résultat de **d** pour évaluer l'aire ombrée de la figure suivante.



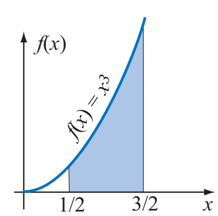
12. Évaluer les intégrales suivantes en déterminant la limite d'une somme de Riemann.

a) $\int_{0}^{1}x^3\,dx$ c) $\int_{0}^{3}x^3\,dx$

b) $\int_{0}^{2}x^3\,dx$ d) $\int_{0}^{d}x^3\,dx$

e) En supposant que le résultat de d est valide pour tout nombre rationnel, évaluer $\int_{0}^{5/2}x^3\,dx$.

f) Utiliser le résultat de d pour évaluer l'aire ombrée de la figure suivante.



13. Représenter graphiquement les intégrandes, utiliser les résultats des numéros 10 à 12, et un argument géométrique pour calculer :

a) $\int_{2}^{5}x^2\,dx$ c) $\int_{1}^{4}x^2\,dx$

b) $\int_{1}^{4}x^3\,dx$ d) $\int_{2}^{6}x^3\,dx$

9.3 Propriétés et applications

Les propriétés de l'intégrale définie vont nous permettre d'utiliser la banque d'intégrales définies des fonctions puissances que nous avons construites à la section 9.2 pour calculer l'intégrale définie de polynômes de degré plus petit ou égal à 3.

Fonction intégrable

Nous avons donné de l'intégrale définie la définition suivante :

Intégrale définie

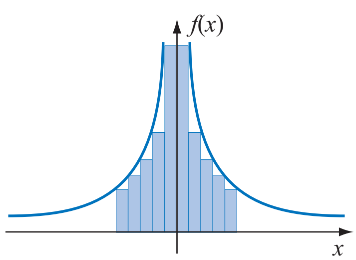
Soit f, une fonction définie sur $[c; d]$ et $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ une partition de cet intervalle. L'**intégrale définie** de la fonction f sur l'intervalle $[c; d]$, notée $\int_c^d f(x)dx$ est définie de la façon suivante :

$$\int_c^d f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i, \text{ où } a_i \in [x_{i-1}; x_i]$$

lorsque cette limite existe. Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction est **intégrable** sur l'intervalle $[c; d]$.

IntegDefProp01

Dans les situations présentées jusqu'à maintenant, la fonction f était toujours une fonction polynomiale et positive dans l'intervalle considéré. Cela peut donner l'illusion que toutes les fonctions sont intégrables partout, mais ce n'est pas le cas.



Considérons, par exemple, la fonction définie par $f(x) = 1/x^2$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre. Peut-on dire que cette fonction est intégrable dans l'intervalle $[–1; 1]$? C'est-à-dire la limite de la somme de Riemann existe-t-elle? On constate que lorsqu'une fonction présente des discontinuités dans l'intervalle considéré, elle peut fort bien ne pas être intégrable. Cela nécessitera éventuellement une analyse plus approfondie.

REMARQUE
La limite de la somme de Riemann existe si la valeur limite est un nombre réel. Lorsque la fonction est discontinue dans l'intervalle considéré, la limite n'existe pas toujours.

Cependant, si la fonction ne présente pas de discontinuités dans l'intervalle considéré, elle sera intégrable. C'est ce que nous indique le théorème suivant.

REMARQUE
Les fonctions exponentielle et logarithmique de base e, la fonction sinus et la fonction cosinus sont des fonctions continues. Elles sont donc intégrables, sur un intervalle $[c; d]$, mais la limite de la somme de Riemann ne peut se déterminer par les procédures présentées à la section précédente.

THÉORÈME

Fonction continue et intégrale définie

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[c; d]$, alors f est intégrable sur $[c; d]$.

Propriétés de l'intégrale définie

L'intégrale définie a quelques propriétés qui en facilitent le calcul. Avant de présenter ces propriétés, nous posons les deux définitions suivantes.

Pour toute fonction intégrable f sur $[c; d] \in$ dom f, on pose les définitions suivantes :

- $\int_c^c f(x)dx = 0$, pour tout $c \in$ dom f,
- $\int_d^c f(x)dx = -\int_c^d f(x)dx$.

Le théorème suivant, première propriété de l'intégrale définie, indique comment utiliser l'intégrale définie sur des intervalles adjacents et disjoints.

THÉORÈME

Intégrale sur une union d'intervalles adjacents disjoints

Soit f, une fonction intégrable sur $[c; d]$ et $b \in\ ]c; d[$, alors :

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_b^d f(x)dx.$$

Plusieurs fonctions sont obtenues à partir de fonctions plus simples en effectuant des produits par une constante et des sommes. Les propriétés présentées dans les deux prochains théorèmes indiquent comment ramener le calcul d'une intégrale définie à des intégrales plus simples.

THÉORÈME

Intégrale d'une somme de fonctions

Soit f et g, deux fonctions continues et non négatives sur $[c; d]$, alors :

$$\int_c^d [f(x) \pm g(x)]dx = \int_c^d f(x)dx \pm \int_c^d g(x)dx.$$

Idée de la preuve

Pour démontrer ce théorème, on peut utiliser la définition de l'intégrale définie par une somme de Riemann.

Soit $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, une partition de $[c; d]$, alors :

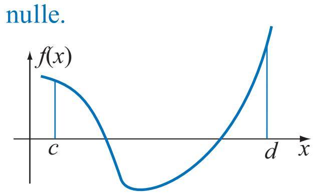
$$\int_c^d [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(a_i) \pm g(a_i)]\Delta x_i, \text{ où } a_i \in [x_{i-1}; x_i].$$

En appliquant les propriétés des sommations et celles des limites, on obtient :

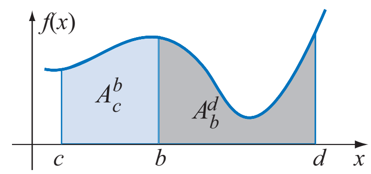
$$\begin{aligned}\int_c^d [f(x) \pm g(x)]dx &= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(a_i)\Delta x_i \pm g(a_i)\Delta x_i] \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i \pm \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(a_i)\Delta x_i \\ &= \int_c^d f(x)dx \pm \int_c^d g(x)dx.\end{aligned}$$

REMARQUE

La première définition est cohérente avec l'idée intuitive que l'aire entre un point c et la courbe $y = f(x)$ doit être nulle.



La deuxième définition est une convention qui permet d'inverser les bornes d'intégration en changeant le signe de l'intégrale.



IntegDefProp02

IntegDefProp03

THÉORÈME

Intégrale du produit d'une fonction par une constante

Soit f, une fonction continue et non-négative sur $[c; d]$ et $k \in \mathbb{R}$, alors :

$$\int_c^d kf(x)dx = k\int_c^d f(x)dx.$$

Idée de la preuve

Soit $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, une partition de $[c; d]$, alors :

$$\int_c^d kf(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(a_i)\Delta x_i, \text{ où } a_i \in [x_{i-1}; x_i].$$

REMARQUE
Ces deux théorèmes se démontrent de la même façon, en appliquant la propriété des limites portant sur la somme et celle portant sur le produit d'une variable par une constante.

En appliquant les propriétés des sommations et celles des limites, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_c^d [kf(x)]dx &= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(a_i)\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i \\ &= k \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i \\ &= k\int_c^d f(x)dx.\end{aligned}$$

EXEMPLE 9.3.1

Dans les exercices de la section précédente, vous avez établi que :

$$\int_0^d 1\, dx = d,\quad \int_0^d x\, dx = \frac{d^2}{2},\quad \int_0^d x^2\, dx = \frac{d^3}{3} \text{ et } \int_0^d x^3\, dx = \frac{d^4}{4}.$$

IntegDefProp04

En utilisant cette information, calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_2^4 x^3\, dx$ b) $\int_0^3 (x^3 + 2x^2 + 5)\, dx$

REMARQUE
Les propriétés représentent un gain appréciable, il n'est plus indispensable de construire la somme de Riemann pour évaluer l'intégrale, il suffit de décomposer en fonctions de puissance entières. Malheureusement, avec ce qui a été démontré, cela ne fonctionne que pour les fonctions polynomiales positives. Notre démarche n'a pas été vaine, mais elle n'est pas complétée.

■ ***Solution***

a) Par les propriétés de l'intégrale définie, on peut écrire :

$$\int_2^4 x^3 dx = \int_0^4 x^3 dx - \int_0^2 x^3 dx.$$

En vertu des généralisations effectuées dans les exercices, on a :

$\int_0^4 x^3 dx = 64$, puisque dans ce cas $d = 4$. De la même façon, on a :

$\int_0^2 x^3 dx = 4$, puisque $d = 2$. Par conséquent, on obtient :

$$\int_2^4 x^3 dx = \int_0^4 x^3 dx - \int_0^2 x^3 dx = 64 - 4 = 60.$$

b) Par les propriétés de l'intégrale définie, on peut écrire :

$$\int_0^3 (x^3 + 2x^2 + 5)\, dx = \int_0^3 x^3\, dx + 2\int_0^3 x^2\, dx + 5\int_0^3 1\, dx.$$

Et, en vertu des généralisations effectuées dans les exercices, on peut écrire :

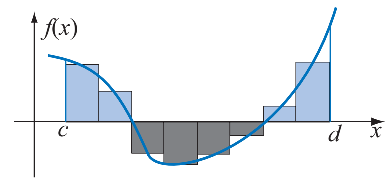
$$\int_0^3 (x^3+2x^2+5)\,dx = \int_0^3 x^3\,dx + 2\int_0^3 x^2\,dx + 5\int_0^3 1\,dx$$
$$= \frac{3^4}{4} + 2\left(\frac{3^3}{3}\right) + 5\times 3 = \frac{213}{4} = 53{,}25.$$

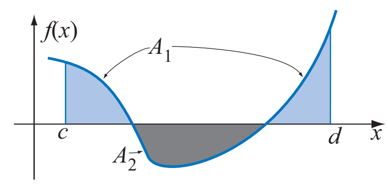
Aire algébrique et aire géométrique

IntegDefProp05

Nous avons vu que si f est une fonction continue et non négative sur l'intervalle $[c;\, d]$, l'aire sous la courbe est donnée par l'intégrale définie au sens de Riemann et on peut écrire :

$$A_c^d = \int_c^d f(x)dx.$$





Si la fonction est parfois positive et parfois négative, la somme de Riemann additionne les aires qui sont au-dessus de l'axe horizontal et soustrait celles au-dessous de l'axe. La différence entre l'aire située au-dessus de l'axe horizontal et l'aire située au-dessous de cet axe est appelée l'**aire algébrique** entre la courbe $y = f(x)$ et l'axe des x dans l'intervalle $[c;\, d]$.

Aire algébrique

Soit f, une fonction continue sur $[c;\, d]$ qui admet dans cet intervalle des valeurs positives et des valeurs négatives. L'**aire algébrique** entre la courbe $y = f(x)$ et l'axe horizontal dans cet intervalle est définie par :

$$\int_c^d f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i, \text{ où } a_i \in [x_{i-1};\, x_i] \subset [c;\, d].$$

REMARQUE
La définition d'aire algébrique nous permet d'appliquer les procédures utilisées jusqu'à maintenant à des fonctions qui peuvent prendre des valeurs négatives.

L'aire algébrique peut être positive, négative ou nulle. Si elle est positive, cela signifie que l'aire au-dessus de l'axe horizontal est plus grande que celle en-dessous. Si elle est négative c'est l'inverse qui se produit et si elle est nulle, les aires au-dessus et en-dessous sont égales.

Aire géométrique

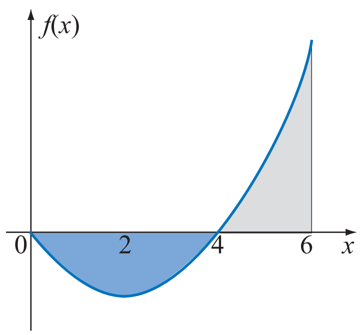
Soit f, une fonction continue sur $[c;\, d]$ qui admet dans cet intervalle des valeurs positives et des valeurs négatives. L'**aire géométrique** entre la courbe $y = f(x)$ et l'axe horizontal dans cet intervalle est la somme de l'aire au-dessus de l'axe horizontal et de la valeur absolue de l'aire en-dessous de cet axe.

EXEMPLE 9.3.2

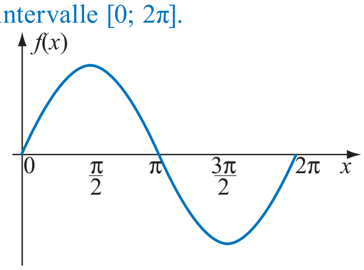
Calculer l'aire algébrique de la fonction définie par la règle de correspondance $f(x) = x^2 - 4x$ dans les intervalles suivants :

a) $[0;\, 4]$ b) $[0;\, 6]$ c) $[4;\, 6]$

d) Calculer l'aire géométrique ente la courbe de la fonction et l'axe horizontal.



REMARQUE
Le signe de l'aire algébrique dépend à la fois de la fonction et de l'intervalle considéré. Ainsi, si on considère la courbe de la fonction $f(x) = \sin x$, l'aire algébrique est positive dans l'intervalle $[0; \pi]$, négative dans l'intervalle $[\pi; 2\pi]$ et nulle dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.



■ *Solution*

a) L'aire algébrique est donnée par :

$$\int_0^4 (x^2 - 4x)dx.$$

Les propriétés de l'intégrale définie permettent d'écrire :

$$\int_0^4 (x^2 - 4x)dx = \int_0^4 x^2 dx - 4\int_0^4 x dx.$$

En vertu des généralisations effectuées en 9.2, on peut écrire :

$$\int_0^4 (x^2 - 4x)dx = \frac{64}{3} - 4 \times \frac{16}{2} = \frac{-32}{3}.$$

L'aire algébrique dans l'intervalle [0; 4] est de –32/3 unités d'aire.

b) Dans l'intervalle [0; 6], on trouve :

$$\int_0^6 (x^2 - 4x)dx = \frac{216}{3} - 4 \times \frac{36}{2} = 0.$$

L'aire algébrique est nulle dans l'intervalle [0; 6].

c) Les propriétés de l'intégrale définie permettent d'écrire :

$$\int_4^6 (x^2 - 4x)dx = \int_0^6 (x^2 - 4x)dx - \int_0^4 (x^2 - 4x)dx$$
$$= 0 - \left(\frac{-32}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

d) L'aire géométrique est la somme des aires positives et de la valeur absolue des aires négatives. On a donc :

$$A = \left|\frac{-32}{3}\right| + \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \text{ u}^2.$$

Applications de l'intégrale définie

IntegDefApplic01

À la section 8.1, nous avons vu que lorsqu'une grandeur est constante, l'aire sous sa courbe représente une autre grandeur physique. On a alors admis intuitivement qu'il en serait de même si la première grandeur était variable. On peut se demander si cette intuition est correcte. Analysons le cas du travail effectué par une force variable. Rappelons d'abord qu'en physique, le travail a une signification qui diffère de celle de la vie courante.

Travail

La **mesure** du travail effectué par une force constante $\vec{F}$ (N) appliquée sur un objet pour le déplacer d'une distance s (m) est défini comme le produit de la force par la distance.

$$W = \vec{F}s.$$

L'unité de mesure du travail est le joule (J) qui équivaut à 1 N·m.

Le travail est donc une grandeur dont la mesure est donnée par le produit de l'intensité de la force en newtons et de la distance en mètres. Le newton équivaut à 1 kg·m/s^2. Rappelons que selon la deuxième loi du mouvement de Newton, la force est le produit de la masse par l'accélération. Ainsi, à la surface terrestre, un bloc de 1 kg (quantité de masse) est soumis à une accélération g de 9,8 m/s^2. Le poids de ce bloc, qui est une force, est alors :

$$1\text{kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 9{,}8 \text{ kg·m/s}^2 = 9{,}8 \text{ newtons}$$

EXEMPLE 9.3.3

Calculer le travail effectué pour soulever un bloc de 4 kg à une hauteur de 2 m.

Solution

La force exercée est :

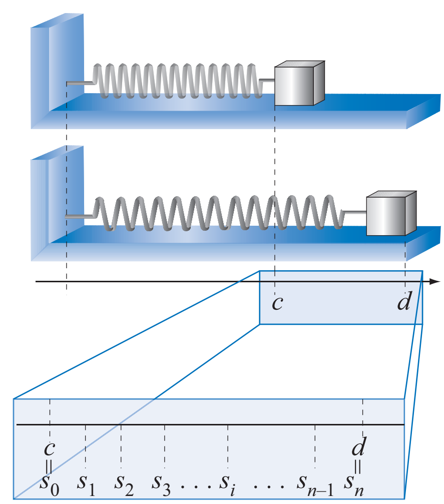
$$\vec{F} = 4 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 39{,}2 \text{ N}.$$

Le travail effectué est :

$$W = 39{,}2 \text{ N} \times 2 \text{ m} = 78{,}4 \text{ N·m} = 78{,}4 \text{ J}.$$

Travail et force variable

Considérons la figure ci-contre où un bloc est soumis à la force d'un ressort comprimé. En relâchant le système, le bloc se déplace de c vers d. À mesure que le bloc se déplace, le ressort se détend et la force qu'il exerce diminue. La force varie donc en fonction de s. Pour déterminer le travail effectué, construisons une partition de l'intervalle $[c; d]$. Les points s_1, s_2, ..., s_i,..., s_n divisent alors l'intervalle $[c; d]$ en sous-intervalles de longueurs Δs_1, Δs_2 ..., Δs_i,..., Δs_n. Notons W_i, le travail produit lorsque le bloc parcourt le i^e intervalle. Le travail produit lorsque le bloc parcourt l'intervalle $[c; d]$ est alors :



$$W = W_1 + W_2 + W_3 + ...+ W_i + ... + W_n.$$

Si la longueur du i^e intervalle est petite, la force ne varie pas beaucoup et on peut considérer que $\vec{F}(a_i)$, où a_i est un point quelconque du i^e intervalle, est une bonne approximation de cette force. Le travail produit sur le i^e intervalle est alors :

$$W_i = \vec{F}(a_i)\Delta s_i.$$

Le travail total sur l'intervalle $[c; d]$ est alors approximé par la somme du travail sur chacun des sous-intervalles :

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(a_i)\Delta s_i.$$

En augmentant le nombre de sous-intervalles de telle sorte que la longueur du plus grand tende vers 0, (max $\Delta x_i \to 0$), l'approximation s'améliore et la valeur exacte du travail produit est :

$$W = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(a_i)\Delta s_i.$$

Le membre de droite de l'équation est alors l'intégrale définie de la force variable sur l'intervalle $[c; d]$, soit :

$$W = \int_c^d \vec{F}(s)\ ds.$$

La discussion qui précède nous amène à poser la définition suivante :

Cette définition du travail a été posée par Gaspard-Gustave Coriolis dans son livre *Du calcul de l'effet des machines* (1829).

Travail produit par une force variable

Le travail produit par une force variable $F(x)$ qui déplace un objet sur un intervalle $[c; d]$ dans le sens positif de la direction d'application de la force est donné par :

$$W = \int_c^d \vec{F}(s)\ ds.$$

Loi de Hooke et énergie

IntegDefApplic02

Pour étirer ou comprimer un ressort, on utilise une force variable. Plus la déformation est importante, plus la force requise est grande. Selon la loi de Hooke, sous certaines conditions, la force requise pour étirer (ou comprimer) un ressort de s unités est proportionnelle à la longueur s. On a donc une description de la force en fonction de s, soit :

NH Robert Hooke

$$\vec{F}(s) = ks$$

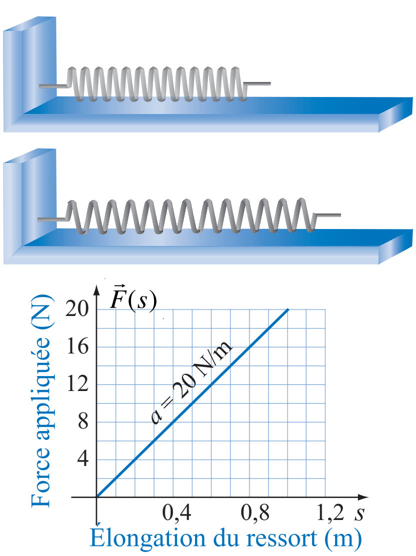
où k est une constante appelée **constante de rappel du ressort**. On peut déterminer la constante de rappel d'un ressort en appliquant une force d'intensité connue (à l'aide d'un dynamomètre, par exemple) et en mesurant l'élongation qui en résulte. La constante est le quotient de la force en newtons par l'élongation en mètres.

EXEMPLE 9.3.4

On veut déterminer le travail effectué pour étirer de 100 cm un ressort dont la constante de rappel est de 20 N/m.

a) Représenter graphiquement la force appliquée en fonction de l'élongation.

b) Calculer le travail effectué pour étirer le ressort.



Solution

a) La force appliquée est variable, elle dépend de l'élongation du ressort et est décrite par :

$$\vec{F}(s) = 20\ \text{N/m} \times s\ \text{m} = 20s\ \text{N}.$$

Graphiquement, c'est une droite de pente 20 N/m passant par l'origine, car la variation est directement proportionnelle à l'élongation.

b) Le travail effectué en fonction de l'élongation est décrit par l'aire du triangle dont la base est $\Delta s = s$ m et la hauteur $\Delta F = F(s) = 20\ s$ N. On a donc :

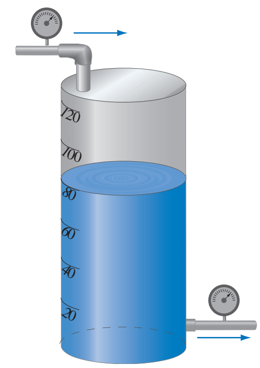
$$W(s) = \int_0^1 \vec{F}(s)\ ds = 20\int_0^1 s\ \ ds = 20 \times \frac{1}{2}\ \text{N} \cdot \text{m} = 10\ \text{J}.$$

EXEMPLE 9.3.5

Un réservoir est muni d'un système de pompage. Lorsque mis en fonction, le débit initial diminue graduellement jusqu'à l'arrêt du système. Le débit, lorsque le système est en fonction, est donné par :

IntegDefApplic03

$$D(t)=\frac{t^2}{5}-6t+45 \text{ L/min}.$$



a) Déterminer le débit initial.
b) Déterminer la durée de fonctionnement du système de pompage lorsqu'il est mis en marche.
c) Déterminer le volume de liquide pompé dans le réservoir lorsque le système se met en marche.

Solution

a) Le débit initial est donné par l'image de la fonction au temps 0 :

$$D(0)=\frac{0^2}{5}-6\times 0+45=45 \text{ L/min}.$$

b) Le système s'arrête lorsque le débit est nul, soit lorsque :

$$D(t)=\frac{t^2}{5}-6t+45=0.$$

Cela donne $t^2 - 30t + 225 = 0$, d'où $(t-15)^2 = 0$. On trouve $t = 15$ et la durée de fonctionnement est de 15 minutes.

c) Le volume de liquide pompé est représenté par l'aire algébrique sous la courbe du débit. On a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{15}\left(\frac{t^2}{5}-6t+45\right) dt &= \frac{1}{5}\int_0^{15} t^2\, dt-6\int_0^{15} t\, dt+45\int_0^{15} 1\, dt\\ &=\frac{1}{5}\times\frac{15^3}{3}-6\times\frac{15^2}{2}+45\times 15\\ &=15^2-3\times 15^2+3\times 15^2=15^2=225.\end{aligned}$$

Lorsque le système se met en marche, il pompe 225 litres.

EXEMPLE 9.3.6

La vitesse d'une particule en mouvement rectiligne est décrite en fonction du temps par

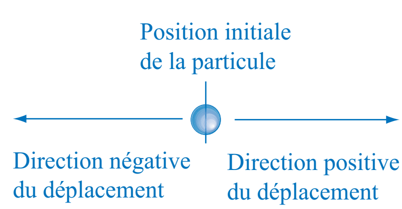
IntegDefApplic04

$$v(t) = t^2 - 5t + 4 \text{ m/s}.$$

a) Déterminer sa variation de position durant l'intervalle [0; 6].
b) Déterminer sa variation de position durant l'intervalle [0; 1].
c) Déterminer sa variation de position durant l'intervalle [1; 6].

Solution

a) La variation de position est représentée par l'aire algébrique sous la courbe de la vitesse. On a donc :



$$\int_0^6 (t^2 - 5t + 4)dt = \int_0^6 t^2\ dt - 5\int_0^6 t\ dt + 4\int_0^6 1\ dt$$
$$= \frac{6^3}{3} - 5 \times \frac{6^2}{2} + 4 \times 6 = 6.$$

La variation de position de la particule durant l'intervalle [0; 6] est de 6 m.

b) $$\int_0^1 (t^2 - 5t + 4)dt = \int_0^1 t^2\ dt - 5\int_0^1 t\ dt + 4\int_0^1 1\ dt$$
$$= \frac{1^3}{3} - 5 \times \frac{1^2}{2} + 4 \times 1 = \frac{11}{6}.$$

REMARQUE

Dans cet exemple, on intègre par rapport au temps *t*. C'est pourquoi la différentielle par rapport à laquelle on intègre s'écrit *dt*.

La variation de position de la particule durant l'intervalle [0; 1] est de 11/6 m.

c) $$\int_1^6 (t^2 - 5t + 4)dt = \int_0^6 (t^2 - 5t + 4)dt - \int_0^1 (t^2 - 5t + 4)dt$$
$$= 6 - \frac{11}{6} = \frac{25}{6}.$$

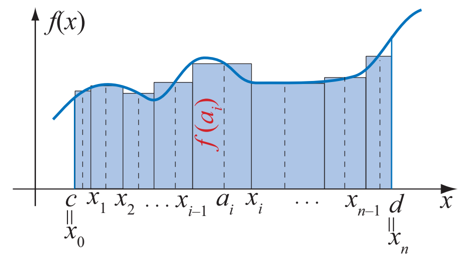
La variation de position de la particule durant l'intervalle [1; 6] est de 25/6 m.

RELATIONS ENTRE GRANDEURS PHYSIQUES

Intégrale définie et grandeurs physiques

- L'aire algébrique sous la courbe décrivant le débit de liquide dans une conduite donne la variation du volume de liquide durant l'intervalle de temps considéré.
- L'aire algébrique sous la courbe décrivant l'accélération donne la variation de vitesse durant l'intervalle de temps considéré.
- L'aire algébrique sous la courbe décrivant la vitesse donne la variation de position durant l'intervalle de temps considéré.
- L'aire algébrique sous la courbe décrivant le courant dans un conducteur donne la variation de charge durant l'intervalle de temps considéré.
- L'aire algébrique sous la courbe décrivant le taux de croissance d'une population donne la variation de population durant l'intervalle de temps considéré.
- L'aire algébrique sous la courbe décrivant l'intensité d'une force variable agissant sur un objet donne le travail effectué par cette force sur l'intervalle de longueur considéré.

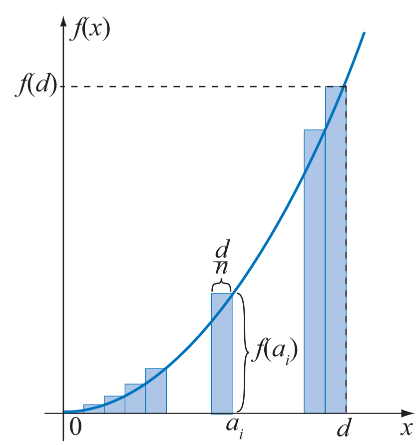
Retour sur l'apprentissage



On peut estimer l'aire sous la courbe d'une fonction dans un intervalle en déterminant une partition de cet intervalle. Sur chacun des sous-intervalles de la partition, on construit un rectangle dont la hauteur est l'image par la fonction d'une valeur sous-intervalle correspondant. La somme des aires des rectangles est alors une valeur approchée de l'aire sous la courbe et la précision de cette estimation augmente avec le nombre de sous-intervalles de la partition.

En déterminant une partition régulière de l'intervalle, on peut exprimer l'aire sous certaines courbes à l'aide d'une sommation dont le terme générale est l'aire d'un des rectangles exprimée en fonction du nombre n de subdivisions de la partition. En prenant la limite lorsque n tend vers l'infini, on obtient la valeur exacte de l'aire sous la courbe. De façon plus générale, la somme des aires des rectangles construits sur une partition est appelée **somme de Riemann** et l'intégrale définie sur un intervalle $[c; d]$ est la limite de la somme de Riemann lorsque la largeur du plus grand des sous-intervalles de la partition tend vers 0.

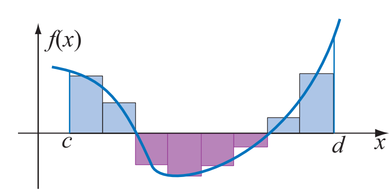
$$\int_c^d f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i, \text{ où } a_i \in [x_{i-1}; x_i[\subset [c;d]$$



Ainsi, dans le cas d'une fonction puissance de degré plus petit ou égal à 3, on a vu comment effectuer l'intégrale définie en prenant la limite d'une somme de Riemann construite en divisant l'intervalle d'intégration en une partition de sous-intervalles. On détermine l'aire du i^e rectangle pour obtenir le terme général de la somme, on détermine la forme compacte des sommes pour évaluer la limite et obtenir l'aire sous la courbe. Dans les exercices de la série 9.2, on a pu déterminer cette aire dans un intervalle $[0; d]$.

Une fonction continue sur un intervalle fermé est intégrable sur cet intervalle. Grâce aux propriétés de l'intégrale définie, on peut considérer une fonction polynomiale de degré plus petit ou égal à 3 comme une combinaison de fonctions puissances pour en effectuer l'intégrale.

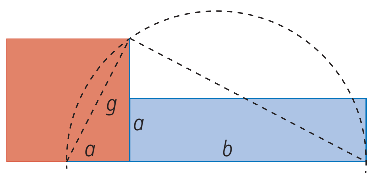
Lorsqu'une fonction est partout négative dans un intervalle, l'aire entre sa courbe et l'axe horizontal est négative, c'est une **aire algébrique**. Pour déterminer l'aire au sens géométrique, il faut prendre la valeur absolue de l'aire algébrique. Lorsqu'une fonction est parfois positive, parfois négative dans un intervalle, on calcule l'aire au sens géométrique en déterminant les zéros de la fonction et en intégrant séparément sur chacun des sous-intervalles déterminés par les zéros. On fait ensuite la somme des valeurs obtenues en prenant leur valeur absolue lorsqu'elles sont négatives.



Un peu *d'histoire*

AIRE ET QUADRATURE

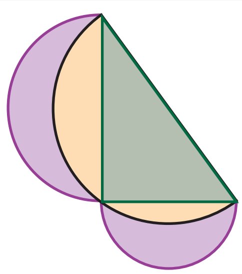
L'intérêt des géomètres grecs pour les aires est déjà manifeste chez les Pythagoriciens qui cherchaient à établir les relations entre les figures en ayant recours aux rapports et proportions. Un des sujets de recherche était la **quadrature des figures**, démarche qui consistait, en utilisant seulement une règle non graduée et un compas, à construire un carré ayant même aire qu'une figure donnée ((NH Quadrature, NH Constructions, NH Pythagore07). Les géomètres ne cherchaient pas à calculer l'aire au sens où nous l'entendons aujourd'hui. Le résultat cherché n'était pas une valeur numérique, mais un carré ayant la même aire.



Quadrature d'un rectangle

La démarche est assez simple dans le cas d'un rectangle, il suffit de construire la moyenne proportionnelle entre les deux côtés. Puisque l'aire d'un triangle est le double de celle d'un rectangle de même base et de même hauteur et que tout polygone peut se décomposer en triangles, les géomètres ont obtenu assez rapidement des résultats pour les figures délimitées par des lignes droites.

Le premier géomètre ayant réalisé la quadrature de figures délimitées par des lignes courbes est Hippocrate de Chios (NH Hippocrate). Les figures dont il a réalisé la quadrature sont appelées **lunules d'Hippocrate**. Il a obtenu ce résultat en cherchant à réaliser la quadrature du cercle. Les travaux d'Hippocrate s'inscrivent dans le contexte de l'époque, la solution des problèmes géométriques, et en particulier ceux de quadrature devaient être obtenus en n'utilisant que la règle non graduée et le compas.



Lunules d'Hippocrate

Hippocrate

Pythagore04, 05

PROBLÈMES DE L'ANTIQUITÉ

Le plus connu des problèmes de quadrature est celui de la quadrature du cercle. Ce problème consiste, en n'utilisant que la règle non graduée et le compas, à construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un cercle donné. La règle non graduée sert exclusivement à tracer une droite passant par deux points et le compas sert à reporter des longueurs et à tracer des arcs de cercle. Le problème aurait été posé vers ~430 par Anaxagore lors de sa détention à Athènes pour ***impiété***[1].

Dès le V^e^ siècle avant notre ère, plusieurs mathématiciens ont cherché sans succès à résoudre ce problème, dont Hippocrate de Chios, Antiphon (NH Eudoxe 01), Bryson d'Héraclée et Hippias d'Élis et la quête s'est poursuivie jusqu'à ce que Pierre-Laurent Wantzel, en 1837, démontre un théorème qui permet de déterminer la forme des équations dont la solution comporte des nombres constructibles à la règle et au compas. Ce sont les nombres rationnels et les racines de certains polynômes de degré $2n$ à coefficients entiers, donc des nombres algébriques. Il restait à démontrer que π n'est pas un nombre algébrique, qu'il est transcendant. C'est en 1882 que Ferdinand von Lindemann a réussi à démontrer la transcendance de π. Par conséquent, on ne peut construire à la règle et au compas un segment de longueur π et la quadrature du cercle est impossible. Ce problème impossible a donné naissance à une expression : « Chercher la quadrature du cercle » qui signifie « Tenter de résoudre un problème insoluble ».

La quadrature du cercle fait partie des trois grands problèmes de l'Antiquité. Les autres sont la trisection de l'angle et la duplication du cube. La trisection de l'angle est le problème consistant à diviser un angle en trois angles égaux. La trisection est assez simple dans le cas d'un angle droit, mais celle d'un angle quelconque est impossible.

La duplication du cube consiste à construire un cube dont le volume est le double de celui d'un cube donné. Selon la légende, les habitants de l'île de Délos, où sévissait une épidémie de peste, ont demandé à l'oracle de Delphes comment faire cesser cette épidémie. La réponse de l'oracle fut qu'il fallait doubler l'autel consacré à Apollon, autel dont la forme était un cube parfait. Comment procéder pour doubler exactement le volume d'un autel cubique ? Pour trouver réponse à cette question, les architectes ont consulté Platon qui leur répondit que le dieu ne souhaitait pas avoir un autel double, mais qu'il leur faisait reproche, de négliger la géométrie. Le problème devait donc être résolu en n'utilisant que la règle non graduée et le compas conformément aux exigences de la géométrie, ce qui s'est également révélé impossible.

1. Dans les religions païennes, l'impiété est un manque de considération pour les obligations dues au culte c'est-à-dire à l'ensemble des pratiques liées à une croyance. Dans les civilisations anciennes, on croyait que le non respect de ces obligations pouvait entraîner la colère des dieux envers la cité. Le respect des obligations du culte, était un devoir civique plus que religieux.

9.4 Exercices

1. En utilisant les propriétés de l'intégrale définie et les résultats des exercices 10, 11 et 12 de la section 9.2, calculer les intégrales définies suivantes.

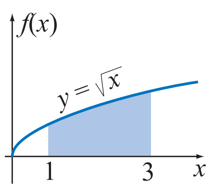
a) $\int_2^5 x^2\,dx$ c) $\int_2^4 (9-x^2)\,dx$

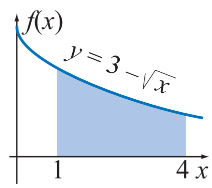
b) $\int_3^6 x^3\,dx$ d) $\int_2^4 (x^3-x^2)\,dx$

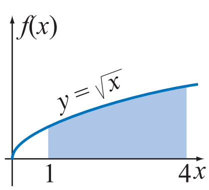
2. On vous donne la banque d'intégrales définies suivante :

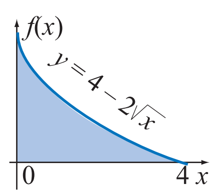
$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}, \quad \int_0^2 \sqrt{x}\,dx = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$
$$\int_0^3 \sqrt{x}\,dx = 2\sqrt{3}, \quad \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{16}{3}.$$

En utilisant les propriétés de l'intégrale définie, calculer les aires suivantes :

a) 

c) 

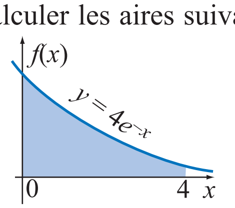
b) 

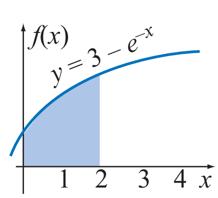
d) 

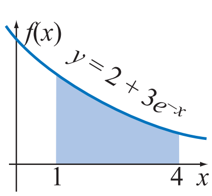
3. On donne la banque d'intégrales suivante :

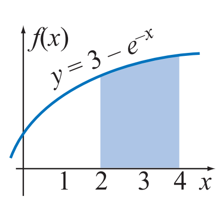
$$\int_0^1 e^{-x}\,dx = \frac{e-1}{e} \quad \int_0^2 e^{-x}\,dx = \frac{e^2-1}{e^2}$$
$$\int_0^3 e^{-x}\,dx = \frac{e^3-1}{e^3} \quad \int_0^d e^{-x}\,dx = \frac{e^d-1}{e^d}.$$

En utilisant les propriétés de l'intégrale définie, calculer les aires suivantes :

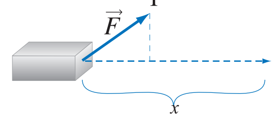
a) 

c) 

b) 

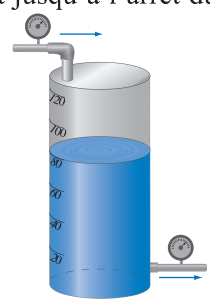
d) 

4. Une force variable agissant sur un objet varie en fonction de la distance x parcourue par l'objet.



Cette force est décrite par :
$F(x) = 15 - 0{,}5x^2$, où x est en mètres (m).
Déterminer le travail effectué pour déplacer l'objet de 0 à 6 m.

5. Un réservoir est muni d'un système de pompage. Lorsque mis en fonction, le débit initial diminue graduellement jusqu'à l'arrêt du système.



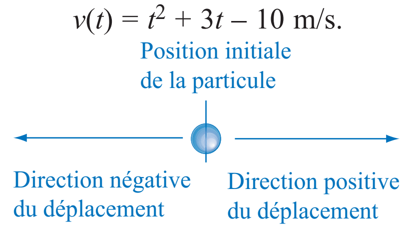
Le débit, lorsque le système est en fonction, est donné par :

$$D(t) = 0{,}1t^2 - 4t + 40 \text{ L/min}$$

a) Déterminer le débit initial.
b) Déterminer la durée de fonctionnement du système de pompage lorsqu'il est mis en marche.
c) Déterminer le volume de liquide pompé dans le réservoir lorsque le système se met en marche.

6. Une particule a une trajectoire rectiligne, sa vitesse en fonction du temps est décrite par :

$$v(t) = t^2 + 3t - 10 \text{ m/s}.$$



a) Déterminer son changement de position durant l'intervalle de temps [0; 6].
b) Déterminer son changement de position durant l'intervalle de temps [0; 2].
c) Déterminer son changement de position durant l'intervalle de temps [2; 6].
d) Déterminer la distance totale parcourue par la particule durant l'intervalle [0; 6].

7. Un mobile en déplacement rectiligne est accéléré pendant deux secondes après quoi l'accélération est nulle. Cette accélération est décrite en fonction du temps par :

$$a(t) = 4 - t^2 \text{ m/s}^2.$$

a) Trouver la variation de la vitesse durant ces deux secondes.
b) Si la vitesse était de 2 m/s au moment où la particule a été accélérée, quelle est sa vitesse quatre secondes plus tard?

8. La vitesse d'un mobile est décrite en fonction du temps t par :

$$v(t) = 0{,}4t^2 + 0{,}2 \text{ m/s}.$$

a) Calculer la variation de la position du mobile durant l'intervalle [0; 6].
b) Calculer la variation de la position du mobile durant l'intervalle [3; 9].

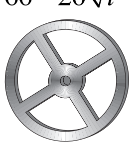
9. Une pompe est utilisée pour remplir un réservoir initialement vide. Durant 8 secondes, la pompe a un débit décrit par :

$$D(t) = 48t - 6t^2 \text{ L/s}.$$

où t est le temps en secondes.
a) Représenter graphiquement cette fonction dans l'intervalle [0; 8].
b) Calculer le volume pompé durant l'intervalle [0; 2].
c) Calculer le volume pompé durant l'intervalle [2;5].
d) Calculer le volume pompé durant l'intervalle [1; 6].

10. La vitesse angulaire d'une roue d'inertie suivant la mise hors tension de l'appareil est décrite en fonction du temps par :

$$\omega(t) = 60 - 20\sqrt{t} \text{ t/min}.$$



a) Déterminer le nombre de tours de la roue durant les quatre minutes qui suivent la mise hors tension de l'appareil
(Utiliser $\int_0^d \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3} d^{3/2}$).
b) Déterminer le temps nécessaire pour que le véhicule s'arrête.
c) Déterminer le nombre de tours de la roue entre la mise hors tension et l'arrêt complet.

Exercices de synthèse

1. En vous servant des résultats des exercices 10, 11 et 12 de la section 9.2, démontrer les résultats suivants :

a) $\int_c^d 1\, dx = d - c$ c) $\int_c^d x^2\, dx = \frac{d^3}{3} - \frac{c^3}{3}$

b) $\int_c^d x\, dx = \frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}$ d) $\int_c^d x^3\, dx = \frac{d^4}{4} - \frac{c^4}{4}$

2. Exprimer mathématiquement l'aire sous la courbe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction de l'abscisse x dans l'intervalle $[0; x]$.

3. Un mobile initialement au repos subit, durant 6 secondes, une accélération décrite en fonction du temps t par :

$$a(t) = 36 - 6t \text{ m/s}^2.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération durant l'intervalle [0; 6].
b) Calculer la variation de la vitesse durant l'intervalle [0; 3]
c) Calculer la variation de la vitesse durant l'intervalle [2; 5].

4. Un mobile initialement au repos subit, durant 12 secondes, une accélération décrite en fonction du temps t par :

$$a(t) = 12 - t \text{ m/s}^2.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération durant l'intervalle [0; 12].
b) Calculer la variation de la vitesse durant l'intervalle [1; 4].
c) Calculer la variation de la vitesse durant l'intervalle [5; 8].