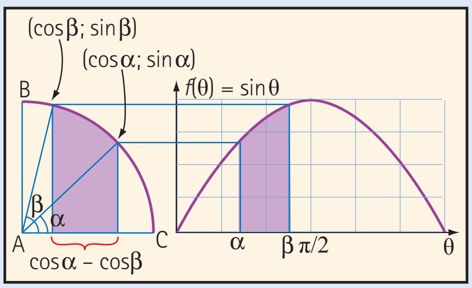
Blaise Pascal
1623–1662

Dans le *Traité des sinus du quart de cercle*, **Pascal démontre géométriquement des propositions mettant en relation l'aire sous la courbe des puissances entières de la fonction sinus et l'aire sous la courbe des puissances des ordonnées du quart de cercle. Voyons quelques démonstrations modernes de ces résultats.**

Les sinus du quart de cercle
Démonstrations modernes



Proposition I

La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes multipliée par le rayon.

La démonstration de cette proposition est une intégrale usuelle que l'on peut effectuer directement.

$$\int_\alpha^\beta \sin\theta \, d\theta = -\cos\theta]_\alpha^\beta$$

$$= -\cos\beta + \cos\alpha$$

$$0 \le \alpha \le \beta \le \pi/2$$

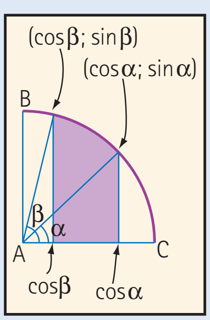
Proposition II

La somme des carrés de ces sinus est égale à la somme des ordonnées au quart de cercle qui seraient comprises entre les sinus extrêmes multipliées par le rayon.

L'équation du cercle de rayon unitaire est $x^2 + y^2 = 1$ et les ordonnées dans l'intervalle « entre les sinus extrêmes » sont décrites par $y = \sqrt{1 - x^2}$.

La « somme des ordonnées » est alors l'intégrale définie :

$$\int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} \sqrt{1 - x^2} \, dx$$



En écriture moderne, cette proposition est donc :

$$\int_\alpha^\beta \sin^2\theta \, d\theta = \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} (1 - x^2)^{1/2} \, dx$$

Pour démontrer cette égalité, il faut effectuer deux intégrales et vérifier que le résultat est le même.

$$\int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} (1 - x^2)^{1/2} \, dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x \Big]_{\cos\beta}^{\cos\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}(\sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha)$$

$$\int_\alpha^\beta \sin^2\theta \, d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}(\sin\theta\cos\theta)\Big]_\alpha^\beta$$

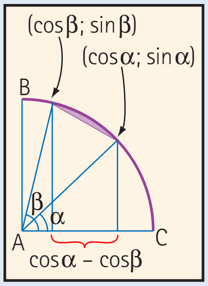
$$= \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta\right) - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}(\sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha)$$

Les deux intégrales donnent la même expression, ce qui démontre la seconde proposition.

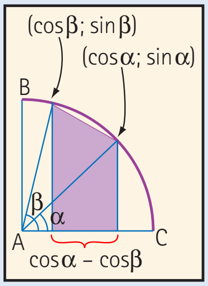
Démonstration géométrique

On remarque que la deuxième intégrale peut être effectuée géométriquement. En effet, la somme des ordonnées du quart de cercle comprises entre les sinus extrêmes est l'aire sous l'arc de cercle sous-tendu par l'angle au centre $\beta - \alpha$.



L'aire sous cet arc de cercle peut être considéré comme la somme de l'aire d'un secteur circulaire et d'un trapèze. L'aire d'un secteur circulaire d'angle au centre θ étant donnée par :

$$A_s = \frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta)$$



Pour un rayon unitaire et un angle au centre $\beta - \alpha$, l'aire du secteur est :

$$A_s = \frac{1}{2}\left((\beta-\alpha) - \sin(\beta-\alpha)\right)$$

Les bases du trapèzes sont sin α et sin β et sa hauteur est cos β – cos α, son aire est donc :

$$A_t = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)(\cos\beta - \cos\alpha)$$

En effectuant la somme de ces aires, on obtient l'aire sous l'arc intercepté par l'angle au centre $\beta - \alpha$, soit la somme des ordonnées entre les sinus extrêmes, ce qui donne :

$$A_s + A_t = \frac{1}{2}\left((\beta-\alpha) - \sin(\beta-\alpha)\right)$$

$$+\frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)(\cos\beta - \cos\alpha)$$

On développe sin $(\beta - \alpha)$ et on effectue les opérations, il reste :

$$A_s + A_t = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$$

$$-\frac{1}{2}(\sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha)$$

Les deux intégrales donnent la même expression, ce qui est une autre façon de démontrer la seconde proposition.

Proposition III

La somme des cubes des mêmes sinus est égale à la somme des carrés des mêmes ordonnées comprises entre les sinus extrêmes multipliées par le rayon.

En écriture moderne et en considérant un rayon unitaire,

$$\int_\alpha^\beta \sin^3\theta\, d\theta = \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} (1-x^2)\, dx$$

On démontre cette proposition en évaluant les intégrales :

$$\int_\alpha^\beta \sin^3\theta\, d\theta = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\Bigg]_\alpha^\beta$$

$$\int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} (1-x^2)\, dx = x - \frac{x^3}{3}\Bigg]_{\cos\beta}^{\cos\alpha}$$

Proposition IV

La somme des carré-carrés des mêmes sinus est égale à la somme des cubes des mêmes ordonnées comprises entre les sinus extrêmes multipliées par le rayon.

En écriture moderne et en considérant un rayon unitaire,

$$\int_\alpha^\beta \sin^4\theta\, d\theta = \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} (1-x^2)^{3/2}\, dx$$

À partir de ces quatre premières propositions, Pascal généralise en écrivant « ainsi de suite à l'infini ». En écriture moderne la proposition est la suivante.

Proposition générale

La proposition générale s'énonce :

Pour $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi/2$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_\alpha^\beta \sin^n\theta\, d\theta = \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} (1-x^2)^{(n-1)/2}\, dx$$

Dans le cas particulier où $n = 0$, la proposition est alors :

$$\int_\alpha^\beta \sin\theta\, d\theta = \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} (1-x^2)^0\, dx$$

Pour démontrer cette égalité, il faut effectuer deux intégrales et vérifier que le résultat est le même.

$$\int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} (1-x^2)^0\, dx = \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} 1\, dx$$

$$= x\Big]_{\cos\beta}^{\cos\alpha}$$

$$= \cos\alpha - \cos\beta$$

$$\int_\alpha^\beta \sin\theta\, d\theta = -\cos\theta\Big]_\alpha^\beta$$

$$= -\cos\beta + \cos\alpha$$

Les résultats obtenus par Pascal sont assez impressionnants puisque sa démarche est purement géométrique.