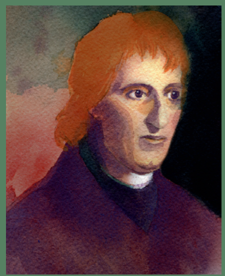
Illustrations : Noémie Ross



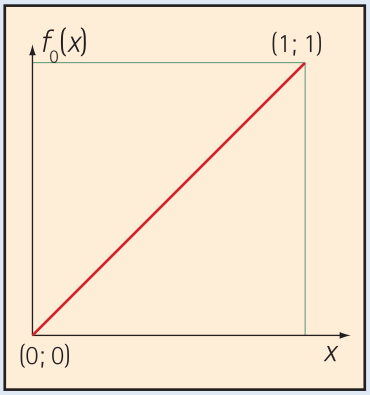
Bernard Bolzano
1781-1848

Contrairement à Cauchy qui croyait qu'une fonction continue est nécessairement dérivable, Bolzano distingue les deux attributs et, quarante ans avant Weierstrass, construit une fonction d'une variable réelle, continue sur un intervalle fermé et qui n'est dérivable en aucun des points de cet intervalle.

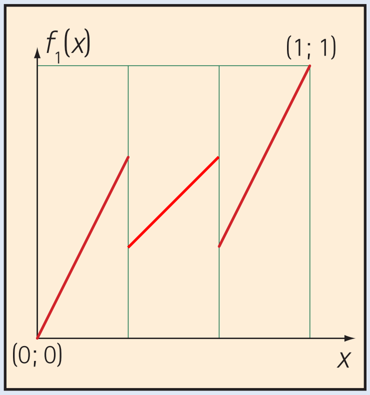
Bernard Bolzano
Fonction continue non dérivable

Le manuscrit dans lequel Bolzano présente sa fonction continue sur l'intervalle [0; 1] mais qui n'est dérivable en aucun des points de l'intervalle n'a été connu qu'en 1921. Cette fonction résulte d'une construction géométrique alors que l'exemple de Weierstrass est une construction numérique.

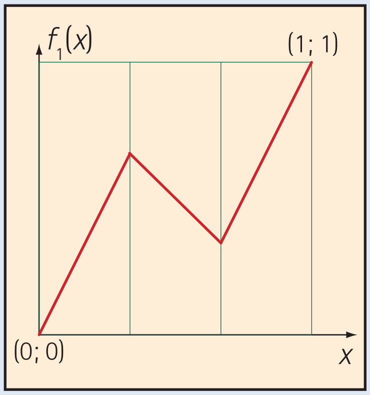
Bolzano considère d'abord la fonction $f_0(x) = x$ sur l'intervalle [0; 1]. Graphiquement, c'est le segment de droite joignant les points (0; 0) et (1; 1).



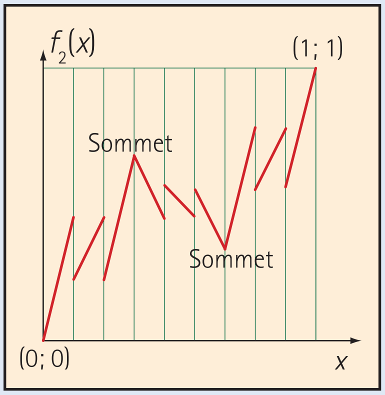
Il subdivise l'intervalle [0; 1] en trois sous intervalles et double la pente des segments aux extrémités en conservant fixe les points (0; 0) et (1; 1).



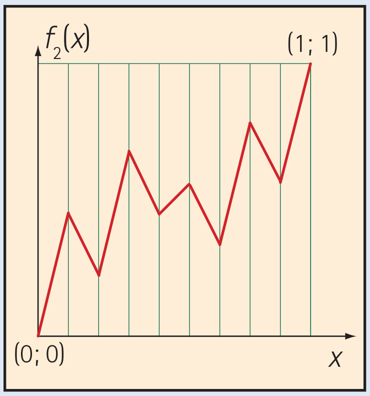
Puis, il modifie le segment central pour joindre les deux autres segments de telle sorte que la fonction soit continue. Il obtient alors la fonction $f_1(x)$.



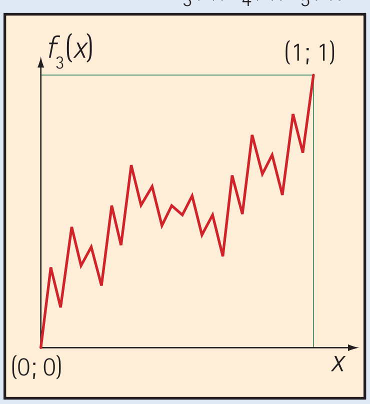
Il divise à nouveau chacun des segments en trois segments égaux et double les pentes en conservant les sommets fixes ainsi que les (0; 0) et (1; 1).

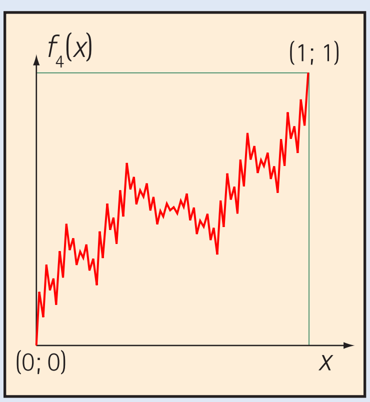


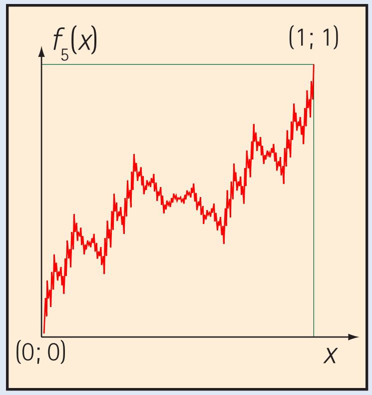
Il modifie à nouveau les segments orphelins pour obtenir une fonction continue. Il obtient alors la fonction $f_2(x)$.



Il applique à nouveau la procédure à chacun des segments de la ligne brisée obtenue et obtient $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$, ...







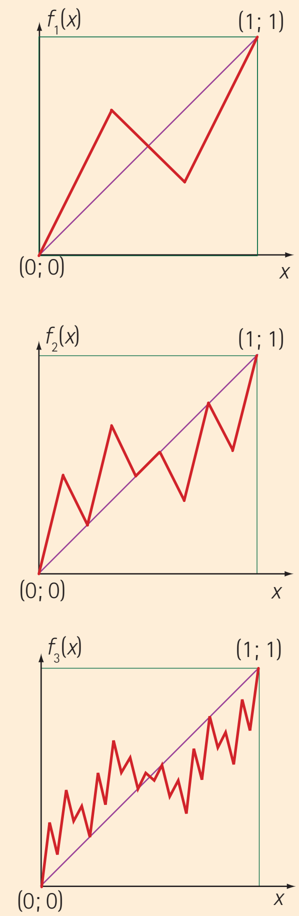
Chaque ligne brisée représente une fonction réelle continue définie sur l'intervalle [0; 1]. En poursuivant ainsi à l'infini, on obtient une suite de fonctions. On peut montrer que cette suite converge uniformément et la limite est appelée *fonction de Bolzano.*

C'est une fonction qui est continue sur l'intervalle [0; 1] mais qui n'est dérivable en aucun point.

En fait, Bolzano, étonné de sa découverte, pensait, comme son contemporain Cauchy, qu'une fonction continue devait au moins être dérivable en des points isolés (en nombre fini ou dénombrable). Et pourtant, la fonction régissant sa courbe n'était dérivable en aucun point : elle fut l'un des premiers monstres de l'analyse.

On remarque que la longueur de la courbe est infinie alors que l'aire sous la courbe est finie. En effet, la symétrie du procédé de construction de la courbe de la fonction de Bolzano permet de conclure que l'aire sous la courbe de chacune des fonctions, f_0, f_1, f_2, ... est égale à 1/2. Cependant, la longueur de la courbe devient infinie. La courbe a une autre propriété, caractéristique des formes fractales, l'invariance d'échelle.

La construction de cette fonction fait penser au procédé de von Koch par la subdivision itérative de l'intervalle [0; 1] en trois sous-intervalles[1].



Dans la construction de la courbe de la fonction de Bolzano, l'aire sous la courbe est constante et égale à 1/2 alors que la longueur de la courbe tend vers l'infini.

1. Voir Georg Cantor, l'escalier du diable.

NH Cantor02