ANNEXE A1

Notions d'algèbre

EXPOSANTS ET RADICAUX

Définition

Exposant

Si n est un nombre entier positif, et a un nombre réel, alors le produit de a par lui-même n fois est noté :

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}} = a^n$$

où n est appelé l'*exposant* et a, la base.

En utilisant cette définition, on peut démontrer les résultats suivants :

Théorème

Règles d'utilisation des exposants

Soit a et $b \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ et m et $n \in \mathbf{R}$.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^0 = 1$
3. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$
4. $(a^m)^n = a^{mn}$
5. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
6. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
8. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, sauf si $a < 0$ et n pair.
9. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, sauf si $a < 0$ et n pair.

Attention (erreurs fréquentes)

$(a+b)^n \neq a^n + b^n$ $\qquad (3+7)^2 = 10^2 = 100$

$\qquad 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$

$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ $\qquad \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\qquad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Produits remarquables

Carré d'une somme

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Carré d'une différence

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Produit d'une somme et d'une différence

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

FACTORISATION

Définition

Terme, facteur et factorisation

Les *termes* sont les parties d'une expression algébrique séparées par des + ou des –.

Un *facteur* est un élément d'un produit.

La *factorisation* (ou décomposition en facteurs) est la démarche algébrique visant à transformer une expression algébrique en un produit de facteurs. C'est la démarche inverse de la multiplication des facteurs.

La *mise en évidence* est la procédure la plus simple de factorisation, elle s'applique lorsque chacun des termes d'une expression algébrique comporte un même facteur appelé *facteur commun*.

Exemples de mise en évidence

$$3x^2 - 6xy + 9y^2 = 3(x^2 - 2xy + 3y^2)$$

$$8x^4 + 4x^2y - 16x^2y^2 = 4x^2(2x^2 + y - 4y^2)$$

FACTORISATION DE TRINÔMES

Forme : $x^2 + bx + c$

En effectuant le produit de deux facteurs $(x + s)$ et $(x + v)$, on obtient :

$$\begin{aligned}(x + s)(x + v) &= x^2 + sx + vx + sv\\ &= x^2 + (s + v)x + sv.\end{aligned}$$

Pour factoriser, on doit faire le cheminement inverse, on doit donc appliquer la procédure suivante.

Procédure

pour décomposer un trinôme de la forme :

$$x^2 + bx + c$$

1. Chercher deux nombres dont la somme donne b et le produit donne c.
2. Exprimer b comme somme de ces nombres.
3. Effectuer une double mise en évidence pour compléter la factorisation.

EXEMPLE

Factoriser $x^2 + 7x + 10$.

Solution

On cherche deux nombres dont le produit donne 10 et la somme donne 7, les nombres sont 2 et 5. On peut écrire :

$$\begin{aligned}x^2 + 7x + 10 &= x^2 + 2x + 5x + 10\\ &= x(x + 2) + 5(x + 2)\\ &= (x + 2)(x + 5).\end{aligned}$$

* * * * * * * * * * * * *

EXEMPLE

Factoriser $x^2 – x – 20$

Solution

On cherche deux nombres dont le produit donne –20 et la somme donne – 1, les nombres sont –5 et 4. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}x^2 - x - 20 &= x^2 - 5x + 4x - 20\\ &= x(x - 5) + 4(x - 5)\\ &= (x - 5)(x + 4)\end{aligned}$$

* * * * * * * * * * * * *

Forme : $ax^2 + bx + c$

En effectuant le produit de deux facteurs $(rx + s)$ et $(ux + v)$, on obtient :

$$(rx + s)(ux + v) = rux^2 + (rv + su)x + sv$$

On constate que les nombres dont la somme donne le coefficient de x, soit $rv + su$ ont comme produit :

$$(ru)(sv) = (rv)(su)$$

soit le produit de la constante par le coefficient de x^2. C'est donc dire que $b = rv + su$ et $ac = rvsu$.

Pour factoriser, on doit faire le cheminement inverse, on doit donc appliquer la procédure suivante.

Procédure

pour décomposer un trinôme de la forme :

$$ax^2 + bx + c$$

1. Chercher deux nombres dont la somme donne b et le produit donne ac.
2. Exprimer b comme somme de ces nombres.
3. Effectuer une double mise en évidence pour compléter la factorisation.

EXEMPLE

Factoriser $3x^2 + 23x + 14$.

Solution

On cherche deux nombres dont le produit est 42 et la somme est 23, on trouve les nombres 2 et 21. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}3x^2 + 23x + 14 &= 3x^2 + 21x + 2x + 14\\ &= 3x(x + 7) + 2(x + 7)\\ &= (x + 7)(3x + 2).\end{aligned}$$

* * * * * * * * * * * * *

EXEMPLE

Factoriser $15x^2 – 77x + 10$.

On cherche deux nombres dont le produit est 150 et la somme est –77, on trouve les nombres –2 et –75. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}15x^2 - 77x + 10 &= 15x^2 - 2x - 75x + 10\\ &= x(15x - 2) - 5(15x - 2)\\ &= (15x - 2)(x - 5).\end{aligned}$$

POLYNÔMES

Définition

Polynôme en *x*

On appelle *polynôme en* x *toute expression de la forme :*

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

où n est un entier positif appelé le *degré du polynôme*, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_2, a_1$ sont des constantes réelles appelées *coefficients,* a_0 est la *constante* et x est la variable.

EXEMPLES

$$p(x) = x^2 - x - 20$$

est un polynôme de degré 2 (ou du second degré).

$$p(x) = 5x^3 + 12x^2 - 3x - 7$$

est un polynôme de degré 3.

* * * * * * * * * * * *

PRODUITS ET QUOTIENT DE POLYNÔMES

Dans un quotient de polynômes, lorsque le degré du numérateur est plus élevé que celui du dénominateur, on peut exprimer le quotient sous une forme équivalente par division des polynômes.

EXEMPLE

Exprimer le quotient $\dfrac{2x^3 - 3x^2 - 72x - 30}{x+5}$ sous une forme équivalente par division des polynômes.

Solution

$$\begin{array}{rl}
2x^3 - 3x^2 - 72x - 30 & \underline{\big|\; x+5 \quad} \\
-\underline{(2x^3 + 10x^2)} \qquad\qquad & 2x^2 - 13x - 7 \\
-13x^2 - 72x - 30 & \\
-\underline{(-13x^2 - 65x)} \quad\; & \\
-7x - 30 & \\
-\underline{(-7x - 35)} & \\
5 &
\end{array}$$

On trouve donc :

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 72x - 30}{x+5} = 2x^2 - 13x - 7 + \frac{5}{x+5}$$

Le reste de la division de deux polynômes est un polynôme de degré inférieur à celui du diviseur.

* * * * * * * * * * * *

EXEMPLE

Exprimer le quotient $\dfrac{2x^3 - 11x^2 + 19x - 12}{x-3}$ sous une forme équivalente par division des polynômes.

Solution

$$\begin{array}{rl}
2x^3 - 11x^2 + 19x - 12 & \underline{\big|\; x-3 \quad} \\
-\underline{(2x^3 - 6x^2)} \qquad\qquad & 2x^2 - 5x + 4 \\
-5x^2 + 19x - 12 & \\
-\underline{(-5x^2 + 15x)} \quad\; & \\
4x - 12 & \\
-\underline{(4x - 12)} & \\
0 &
\end{array}$$

On trouve donc :

$$\frac{2x^3 - 11x^2 + 19x - 12}{x-3} = 2x^2 - 5x + 4.$$

* * * * * * * * * * * *

Lorsque le reste de la division est 0, cela signifie que le diviseur est un facteur du polynôme. Ainsi, on a :

$$2x^3 + 11x^2 + 19x - 12 = (x - 3)(2x^2 - 5x + 4).$$

Définition

Facteur d'un polynôme

Soit $p(x)$ et $q(x)$, deux polynômes en x.
$q(x)$ est un *facteur* de $p(x)$ si et seulement si $q(x)$ divise $p(x)$ sans reste (le reste est 0).

FACTORISATION PAR DIVISION

ZÉROS ET FACTEURS

Définition

Zéros

Les valeurs de la variable x pour lesquelles la valeur numérique d'un polynôme en x s'annule sont appelées les *zéros* de ce polynôme.

EXEMPLES.

En posant $x = 3$ dans le polynôme :

$$2x^3 - 11x^2 + 19x - 12,$$

on obtient :

$$2\times3^3 - 11\times3^2 + 19\times3 - 12 = 54 - 99 + 57 - 12 = 0.$$

Cela s'explique par le fait que $(x - 3)$ est un facteur de $2x^3 - 11x^2 + 19x - 12$. En effet,

$$2x^3 - 11x^2 + 19x - 12 = (x - 3)(2x^2 - 5x + 4).$$

Le facteur $(x - 3)$ s'annule en posant $x = 3$. On a alors une multiplication par 0 qui donne 0.

* * * * * * * * * * * *

Théorème

Zéros et facteurs d'un polynôme

Soit $p(x)$ un polynôme en x.
a est un zéro de $p(x)$ si et seulement si $x - a$ est un facteur de $p(x)$.

ZÉROS ET FACTORISATION

Lorsqu'on multiplie des polynômes entre eux, la constante du produit est le produit des constantes. Ainsi :

$$(x - 2)(x + 3)(2x + 5) = 2x^3 + 7x^2 - 7x - 30.$$

On peut mettre au point une procédure pour trouver les zéros entiers d'un polynôme en déterminant les diviseurs de la constante qui sont des zéros du polynôme.

Procédure

pour factoriser en cherchant les zéros

1. Chercher un zéro entier du polynôme en considérant d'abord les plus petits diviseurs de la constante.
2. Chaque fois qu'un zéro est trouvé, décomposer en facteurs par division de polynômes pour simplifier la recherche.

EXEMPLE

Factoriser le polynôme $2x^3 + 7x^2 - 7x - 30$.

Solution

Les diviseurs de -30 sont $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

On peut déterminer les zéros par substitution et on obtient :

$p(1) = 2\times 1^3 + 7\times 1^2 - 7\times 1^1 - 30 = -28,$

$p(-1) = 2\times(-1)^3 + 7\times(-1)^2 - 7\times(-1)^1 - 30 = -18,$

$p(2) = 2\times 2^3 + 7\times 2^2 - 7\times 2^1 - 30 = 0.$

Puisque $p(2) = 0$, cela signifie que 2 est un zéro de $p(x)$ et $p(x)$ est divisible par $x - 2$. En procédant à la division, on obtient :

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +7x^2 & -7x & -30 & x-2 \\
\cline{5-5}
-(2x^3 & -4x^2) & & & 2x^2 + 11x + 15 \\
\cline{1-2}
 & 11x^2 & -7x & -30 & \\
 & -(11x^2 & -22x) & & \\
\cline{2-3}
 & & 15x & -30 & \\
 & & -(15x & -30) & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

On obtient donc que :

$2x^3 + 7x^2 - 7x - 30 = (x - 2)(2x^2 + 11x + 15).$

Pour compléter, il reste à factoriser le trinôme.

* * * * * * * * * * * *

ZÉROS D'UNE QUADRATIQUE

Pour déterminer les zéros de $ax^2 + bx + c$, on peut utiliser les expressions suivantes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Trois cas peuvent se présenter :

- Si $b^2 - 4ac > 0$, x_1 et x_2 sont deux zéros réels distincts.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, $x_1 = x_2$ et on a un zéro double.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, il n'y a pas de zéro réel (il y a des zéros complexes).

Connaissant les zéros d'une expression quadratique (polynôme de degré 2), on peut déterminer ses facteurs.

EXEMPLE

Déterminer les zéros et les facteurs du polynôme :

$$2x^2 + 11x + 15.$$

Déterminons les zéros, en utilisant :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On trouve :

$$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{11^2 - 4\times 2\times 15}}{2\times 2} = \frac{-11 - \sqrt{1}}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$x_2 = \frac{-11 + \sqrt{1}}{4} = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2}.$$

Par conséquent, $(x+3)$ et $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ sont des facteurs du polynôme. On a donc :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 11x + 15 &= 2(x+3)\left(x + \frac{5}{2}\right) \\ &= (x+3)(2x+5). \end{aligned}$$

ce qui complète la factorisation.

* * * * * * * * * * * *

VALEUR ABSOLUE

Définition

Valeur absolue

Soit x, un nombre réel. La *valeur absolue* de x est définie de la façon suivante :

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

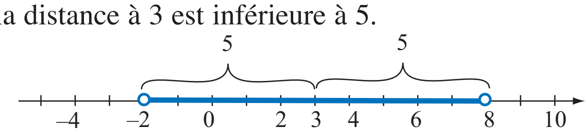
Pour résoudre une équation ou une inéquation comportant des valeurs absolues, il faut tenir compte de cette définition.

EXEMPLE

Résoudre l'inéquation $|x - 3| < 5$.

Solution
On a deux possibilités à envisager selon que $(x - 3)$ est positif ou négatif.

Si $(x - 3) < 0$, on a $-(x - 3) < 5$, ce qui donne :
$$x - 3 > -5 \text{ et } x > -2.$$
Si $(x - 3) > 0$, on a $(x - 3) < 5$, d'où $x < 8$.
L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $]-2; 8[$.
Graphiquement, c'est l'ensemble des valeurs de x dont la distance à 3 est inférieure à 5.



EXEMPLE

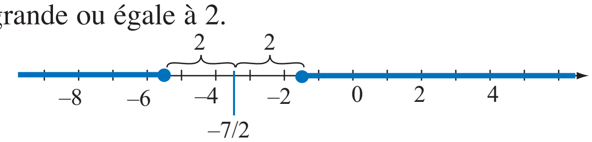
Résoudre l'inéquation $|2x + 7| \geq 4$.

Solution
On a deux possibilités à envisager selon que $(2x + 7)$ est positif ou négatif.

Si $(2x + 7) < 0$, on a $-(2x + 7) \geq 4$, ce qui donne :
$$2x + 7 \leq -4, \text{ d'où } 2x \leq -11 \text{ et } x \leq -11/2.$$

Si $(2x + 7) > 0$, on a $(2x + 7) \geq 4$, ce qui donne :
$$2x \geq -3 \text{ et } x \geq -3/2.$$
L'ensemble des solutions est donc l'union d'intervalles $]-\infty; -11/2] \cup [-3/2; \infty[$.

En écrivant l'inéquation sous la forme :
$$2\left|x + \frac{7}{2}\right| \geq 4 \text{ et } \left|x + \frac{7}{2}\right| \geq 2.$$
On reconnaît que l'ensemble des solutions est l'ensemble des valeurs de x dont la distance à $-7/2$ est plus grande ou égale à 2.



* * * * * * * * * * * *

RATIONALISATION

La rationalisation est une procédure visant à rendre rationnelle une partie d'une expression. Les premiers cas de rationalisation que l'on rencontre sont normalement ceux visant à estimer l'ordre de grandeur d'une expression numérique dont le dénominateur comporte un radical. Ainsi, sachant que $\sqrt{3} = 1,7321\ldots$, comment estimer l'ordre de grandeur de l'expression :
$$\frac{1}{\sqrt{3}}.$$
Pour y parvenir, on rationalise. Dans ce cas, la rationalisation s'effectue en multipliant le numérateur et le dénominateur par le radical. Cela donne :
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

On peut alors facilement estimer l'ordre de grandeur de l'expression puisque 1,7321 divisé par 3 donne environ 0,57.

Ce n'est pas dans un tel contexte que l'on effectue la rationalisation en calcul différentiel. Il faut modifier une expression algébrique afin d'effectuer l'opération apparaissant au numérateur de cette expression alors que ce numérateur comporte des radicaux. La procédure utilisée se fonde sur la différence de carrés. On sait que :
$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

La procédure consiste à multiplier, le numérateur et le dénominateur par l'expression qui permet d'obtenir une différence de carrés. Considérons, par exemple, l'expression :
$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x}.$$
On rationalise cette expression en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x}$ afin d'obtenir une différence de carrés. Cela donne :
$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x} = \overbrace{\sqrt{2x+3}}^{a} - \overbrace{\sqrt{2x}}^{b} \times \frac{\overbrace{\sqrt{2x+3}}^{a} + \overbrace{\sqrt{2x}}^{b}}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x}}$$
$$= \frac{\overbrace{2x+3}^{a^2} - \overbrace{2x}^{b^2}}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x}} = \frac{3}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x}}.$$

L'objectif de la rationalisation dans cet exemple était d'effectuer l'opération au numérateur. C'est exactement le contexte de la plupart des rationalisations en calcul différentiel.

* * * * * * * * * * * *