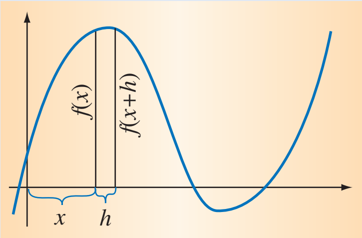
Pierre de Fermat
1601-1665

Pierre de Fermat a développé une méthode pour déterminer les « valeurs extrêmes » d'une fonction dont le déroulement est assez proche de la méthode moderne pour déterminer la fonction dérivée. Seule ombre au tableau, le passage à la limite lorsque h tend vers 0 n'est pas justifié.

Pierre de Fermat

Valeurs extrêmes d'une fonction



Au voisinage d'un maximum ou d'un minimum, $f(x+h) \approx f(x)$.

Valeurs extrêmes d'une fonction

Parmi les contributions de Fermat au développement du calcul, on remarque une méthode pour déterminer les valeurs extrêmes d'une fonction. Par valeurs extrêmes, Fermat désignait les maxima et minima d'une fonction. Sa méthode ressemble beaucoup à la méthode moderne pour déterminer la dérivée d'une fonction.

Dans sa démarche de représentation graphique d'une équation, Fermat constate qu'au voisinage d'une valeur extrême la valeur de la variable dépendante est à peu près constante si on fait varier légèrement la variable indépendante. Il développe alors une démarche pour déterminer les valeurs de la variable indépendante au voisinage desquelles la variable dépendante est à peu près constante.

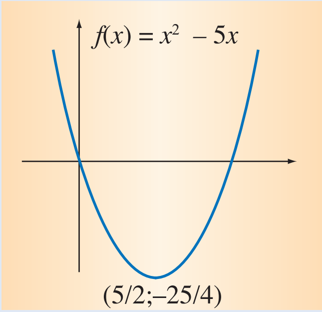
Pour faciliter la compréhension, nous présentons cette méthode en utilisant les notations actuelles, plutôt que les notations de Viète (François, 1540-1603) qui étaient utilisées par Fermat.

La méthode de Fermat pour trouver les maxima et minima d'une fonction $f(x)$ peut être décrite comme suit :

* considérer une variable h dont la valeur est petite comparativement à la valeur de x au voisinage d'une valeur optimale[1] et évaluer $f(x+h)$;
* égaler $f(x+h)$ à $f(x)$;
* éliminer les termes qui se simplifient;
* diviser les deux membres de l'équation par h;
* poser $h = 0$ dans l'expression obtenue et isoler la variable indépendante pour connaître l'abscisse des points extrêmes.

Application de la méthode

Utilisons cette méthode pour trouver la valeur optimale de la fonction définie par $f(x) = x^2 - 5x$.



1. Normalement, les valeurs de $f(x+h)$ et $f(x)$ dans une partie quelconque de la courbe sont différentes. Mais au voisinage d'un maximum ou d'un minimum la différence sera imperceptible si h est suffisamment proche de 0).

En évaluant $f(x + h)$, on obtient :

$y = (x + h)^2 - 5(x + h)$
$= x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h$

En posant $f(x) = f(x + h)$, on a :

$$x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h = x^2 - 5x,$$

d'où, en simplifiant :

$$2xh + h^2 - 5h = 0.$$

En divisant les deux membres de l'équation par h, on obtient :

$$2x + h - 5 = 0.$$

En posant $h = 0$, on trouve $2x - 5 = 0$ d'où $x = 5/2$. La fonction a donc une valeur optimale à $x = 5/2$[2].

Une fonction cubique

Considérons un autre exemple :

$$f(x) = x^3 - 4x^2$$

En évaluant $f(x + h)$, on obtient :

$y = (x + h)^3 - 4(x + h)^2$
$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4x^2 - 8xh - 4h^2$

En posant $f(x) = f(x + h)$ et en simplifiant

$$3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 8xh - 4h^2 = 0.$$

En divisant les deux membres de l'équation par h, on obtient :

$$3x^2 + 3xh + h^2 - 8x - 4h = 0.$$

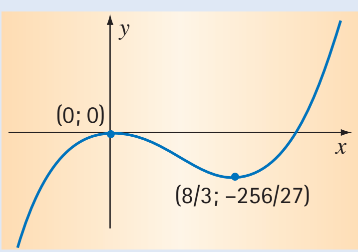
En posant $h = 0$, on trouve

$$3x^2 - 8x = 0,$$

soit $x(3x - 8) = 0$ d'où $x = 0$ et $x = 8/3$.

La fonction a donc des valeurs optimales à $x = 0$ et $x = 8/3$.

En calculant l'image des valeurs de x, on peut les représenter graphiquement.



On remarque que la méthode ne permet pas de distinguer une valeur maximale d'une valeur minimale ou d'une valeur stationnaire dont la tangente est également horizontale.

Dérivée moderne d'une fonction

Comparons la méthode de Fermat à la méthode moderne pour déterminer la dérivée d'une fonction.

Dans sa démarche, Fermat construit d'abord une équation en égalant les images de points voisins

$$f(x + h) = f(x).$$

Cette égalité n'est vraie qu'au voisinage d'une valeur extrême.

Il regroupe alors les termes du même côté de l'égalité, ce qui donne :

$$f(x + h) - f(x) = 0.$$

Puis il divise les deux membres de l'équation par h et il obtient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Il pose ensuite $h = 0$, ce qui revient à évaluer par substitution :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

La méthode de Fermat contourne sans justification le problème de la division par 0. La méthode soulève donc quelques questions :

Puisque l'intention est de poser $h = 0$, peut-on logiquement diviser les deux membres de l'équation par h ?

Est-ce que cela ne revient pas à diviser 0 par 0 ?

Peut-on manipuler des expressions de la forme o/0 comme si ces expressions représentaient des nombres réels ?

Ces questions sont importantes car elles portent sur le fondement de la méthode qui est strictement géométrique.

2. On peut facilement vérifier l'exactitude du résultat puisque le sommet est atteint à $x = -b/2a$.